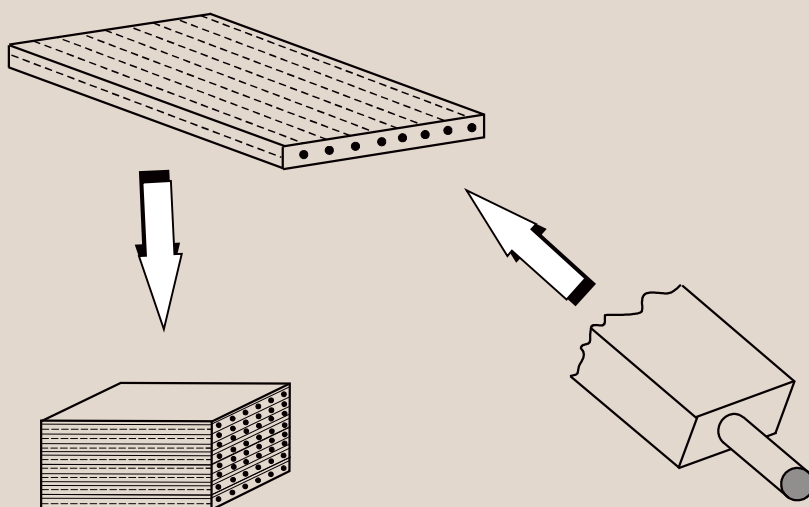


Zbigniew Kołakowski

PODSTAWY WYTRZYMAŁOŚCI
I STATECZNOŚCI PŁYTOWYCH
KONSTRUKCJI KOMPOZYTOWYCH

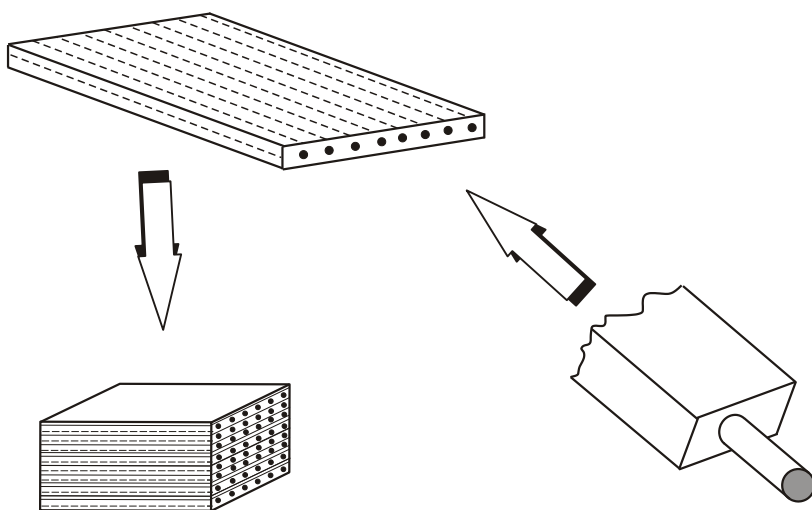


Politechnika Łódzka 2008



Zbigniew Kołakowski

PODSTAWY WYTRZYMAŁOŚCI I STATECZNOŚCI PŁYTOWYCH KONSTRUKCJI KOMPOZYTOWYCH



Politechnika Łódzka 2008

Recenzenci: **prof. dr hab. inż. Marian Królak**
dr hab. inż. Tadeusz Wegner, prof. PP

KOMITET REDAKCYJNY
WYDAWNICTWA POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ

Przewodniczący: **prof. dr hab. Piotr Wodziński**
Redaktor Naukowy Wydziału: **prof. dr hab. Tomasz Kapitaniak**

Skrypt jest przeznaczony dla studentów studiów magisterskich
wydziałów mechanicznych wyższych szkół technicznych,
doktorantów i pracowników naukowych.

Do druku pracę przygotował **dr inż. Andrzej Teter**

*Praca dofinansowana przez Dziekana Wydziału Mechanicznego
Politechniki Łódzkiej prof. dr hab. inż. Piotra Kulę.*

© Copyright by Politechnika Łódzka 2008

Wszelkie prawa zastrzeżone. Rozpowszechnianie niniejszego materiału w wersji oryginalnej albo w postaci opracowania, utrwalanie lub kopiowanie materiału w celu rozpowszechnienia w szczególności zamieszczanie na serwerach www, przekazywanie drogą elektroniczną i wykorzystywanie materiału w inny sposób niż dla celów własnej edukacji bez zgody autora jest zabronione (on-line – Łódzka Regionalna Biblioteka Cyfrowa CYBRA).

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ
90-924 Łódź, ul. Wólczańska 223
tel. 42-631-20-87, 42-631-29-52
fax 42-631-25-38
e-mail: zamowienia@info.p.lodz.pl
www.wydawnictwa.p.lodz.pl

ISBN 978-83-7283-262-7

Nakład 200 egz. Ark druk. 8,0. Papier offset. 80 g 70 x 100
Druk ukończono we wrześniu 2008 r.
Wykonano w drukarni offsetowej WIST, ul. Barona 8B 14, 95-100 Zgierz
Nr 1800

Podstawy wytrzymałości i stateczności płytowych konstrukcji kompozytowych

SPIS TREŚCI

Przedmowa.....	9
1. WSTĘP.....	11
2. STAN NAPRĘŻENIA	16
2.1. Siły masowe i powierzchniowe	16
2.2. Składowe stanu naprężenia.....	19
2.3. Równania równowagi.....	22
2.4. Transformacja składowych stanu naprężenia	25
2.5. Niezmienniki stanu naprężenia.....	27
2.6. Naprężenia oktaedryczne.....	29
2.7. Niezmienniki aksjatora i dewiatora naprężenia.....	30
3. STAN ODKSZTAŁCENIA	33
3.1. Składowe nieskończenie małych odkształceń w kartezjańskim układzie współrzędnych	33
3.2. Niezmienniki stanu odkształcenia	37
3.3. Równania nierozdzielności odkształceń.....	39
4. UOGÓLNIONE PRAWO HOOKE’A CZYLI ZWIĄZKI FIZYCZNE POMIĘDZY NAPRĘŻENIAMI I ODKSZTAŁCENIAMI	43
5. WYBRANE HIPOTEZY WYTRZYMAŁOŚCIOWE	54
5.1. Przykładowe hipotezy wytrzymałościowe dla materiałów izotropowych	55
5.1.1. Hipoteza największego naprężenia stycznego	55
5.1.2. Hipoteza Mohra.....	56
5.1.3. Hipoteza Hubera.....	56
5.1.4. Hipoteza Burzyńskiego	57
5.2. Hipotezy wytrzymałościowe dla materiałów anizotropowych i ortotropowych	57
5.2.1. Hipoteza maksymalnych naprężeń.....	58
5.2.2. Hipoteza maksymalnych odkształceń	59

6.	PLASKIE ZAGADNIENIA W WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW ...	60
6.1.	Plaski stan odkształcenia	60
6.2.	Plaski stan naprężenia.....	61
6.3.	Reguły transformacyjne.....	62
6.4.	Prawo Hooke'a, czyli równania fizyczne dla materiału dwuwymiarowego	64
6.4.1.	Materiał ortotropowy.....	66
6.4.2.	Materiał izotropowy	67
6.5.	Przykładowe hipotezy wytrzymałościowe dla materiałów izotropowych	68
6.5.1.	Hipoteza największego naprężenia stycznego	68
6.5.2.	Hipoteza Hubera.....	69
6.6.	Kryteria zniszczenia dla materiałów ortotropowych dla płaskiego stanu naprężenia	70
6.6.1.	Kryterium maksymalnych naprężeń.....	70
6.6.2.	Kryterium maksymalnych odkształceń	71
6.6.3.	Kryteria interakcji naprężeń niszczących.....	71
6.7.	Przykłady zastosowań hipotez wytrzymałościowych dla płaskiego stanu naprężenia	74
7.	PODSTAWOWE RÓWNANIA CIENKOŚCIENNYCH PROSTOKĄTNYCH PŁYT KOMPOZYTOWYCH	79
7.1.	Podstawowe założenia.....	79
7.2.	Stan odkształcenia	80
7.3.	Mikromechaniczne właściwości warstwy – moduły efektywne	82
7.4.	Makroskopowe właściwości mechaniczne warstwy	85
7.5.	Makroskopowe właściwości mechaniczne kompozytów wielowarstwowych.....	89
7.6.	Oznaczenia konfiguracji laminatów	93
7.7.	Szczególne przypadki laminatów	93
7.7.1.	Regularne laminaty symetryczne	94
7.7.2.	Regularne laminaty antysymetryczne	95
7.8.	Kryterium zniszczenia pierwszej warstwy	98

7.9.	Różniczkowe równania równowagi cienkich prostokątnych płyt kompozytowych	98
7.10.	Warunki brzegowe	105
7.11.	Element belkowy	108
8.	STATECZNOŚĆ CIENKOŚCIENNYCH PŁYT PROSTOKĄTNYCH ..	111
8.1.	Statyczna stateczność konstrukcji cienkościennych.....	111
8.2.	Jednoczesne zginanie i ściskanie płyt prostokątnych.....	113
8.3.	Obciążenie krytyczne ściskanej ortotropowej płyty prostokątnej ..	117
9.	LITERATURA	122

Przedmowa

Prezentowany skrypt stanowi materiał uzupełniający do podstawowego kursu wytrzymałości materiałów dla inżynierów i studentów studiów magisterskich wydziałów technicznych. Zasadniczym celem jest omówienie głównych, wybranych zagadnień mechaniki i wytrzymałości materiałów ortotropowych i kompozytowych, które mogą być następnie wykorzystane w programach metody elementów skończonych. Skrypt ten może umożliwić lepsze „zrozumienie” nowoczesnych materiałów konstrukcyjnych, jakimi są kompozyty i zachęcić do dalszego samodzielnego studiowania wiedzy na ten temat. Powyższe względy zadecydowały o wprowadzeniu zapisu co najwyżej macierzowego.

Rozdział pierwszy, wstęp, stanowi wprowadzenie w tematykę nowoczesnych materiałów konstrukcyjnych. W rozdziale drugim omówiono stan naprężeń w ośrodku ciągłym, sformułowano równania równowagi oraz związki transformacyjne składowych stanu naprężenia w kartezjańskim układzie współrzędnych. Omówiono niezmienniki stanu naprężenia. W rozdziale trzecim przedstawiono stan odkształcenia dla odkształceń nieskończenie małych. Rozdział czwarty poświęcono omówieniu związków fizycznych pomiędzy naprężeniami i odkształceniami dla różnych modeli ciała. W rozdziale piątym omówiono hipotezy wytrzymałościowe dla materiałów izotropowych, oraz kryteria zniszczenia dla materiałów anizotropowych i ortotropowych. W rozdziale szóstym przedstawiono analizę płaskiego stanu odkształcenia i naprężenia oraz kryteria zniszczenia dla różnych materiałów. W rozdziale siódmym zaprezentowano wprowadzenie w mechanikę kompozytów, moduły efektywne, makroskopowe właściwości mechaniczne, szczególne przypadki laminatów. Rozdział ten zawiera także liniową klasyczną teorię prostokątnych płyt kompozytowych. W rozdziale ósmym omówiono zagadnienie stateczności cienkościennych płyt prostokątnych. W ostatnim rozdziale przedstawiono podstawową literaturę przedmiotu.

Autor

1. WSTĘP

Postęp naukowo-techniczny w inżynierii materiałowej, technikach wytwarzania, gwałtowny rozwój metod obliczeniowych, w tym metody elementów skończonych oraz powszechne stosowanie komputerowych systemów projektowania i wytwarzania CAD/CAM umożliwia projektowanie i stosowanie nowoczesnych materiałów konstrukcyjnych w coraz to nowych obszarach zastosowań inżynierskich. Materiałami takimi są materiały ortotropowe, kompozytowe, hybrydowe i gradientowe.

Konieczność spełnienia wymagań dotyczących bezpieczeństwa i niezawodności wymusza rozwój teorii modelowania nowych materiałów, przeprowadzanie badań eksperymentalnych, opracowanie nowych procesów technologicznych. Umożliwia to projektowanie nowych struktur dla złożonych parametrów obciążenia, warunków eksploatacji oraz spełnia określone zadania funkcjonalne (np. materiały inteligentne).

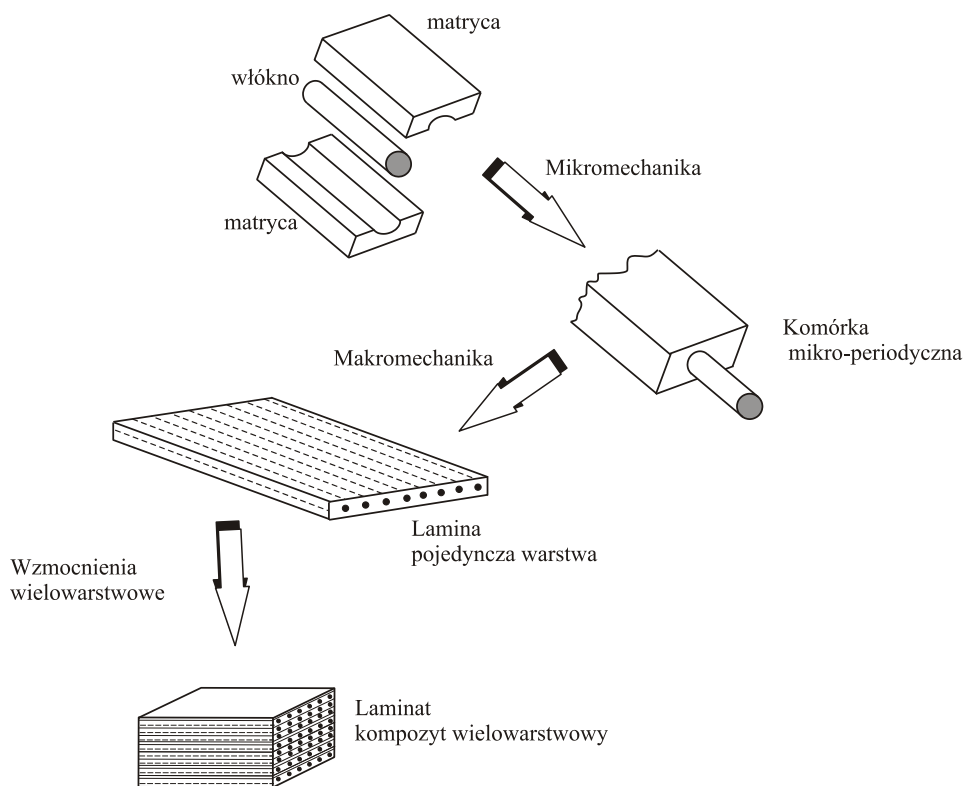
Nowoczesne materiały kompozytowe już od chwili ich pojawienia się w latach sześćdziesiątych XX wieku zapowiadały nową, „lekką”, trwałą i niezawodną ich przyszłość. Impulsem rozwoju były nowe technologie produkcji (np. klejów, uszczelnień) oraz rozwój podstaw teorii anizotropowych warstwowych konstrukcji kompozytowych zwiększających obszar ich zastosowania, rozwój teorii sprężystości, stateczności, teorii płyt i powłok. Dalszym impulsem był rozwój nowych technologii informatycznych, w tym nowych metod obliczeniowych, a zwłaszcza metody elementów skończonych. To określa znaczącą pozycję kompozytów w nowych zastosowaniach techniki, a przede wszystkim w lotnictwie, budowie statków, pojazdów i maszyn, przemyśle chemicznym, budowlanym i rolniczym.

Materiał kompozytowy jest to materiał powstały poprzez połączenie dwóch lub większej liczby składników, mający pożądane przez użytkownika właściwości. W skali mikroskopowej mamy do czynienia z połączeniem materiałów o bardzo różnych właściwościach. Materiał taki zachowuje się jak zupełnie nowy materiał jednorodny w skali makroskopowej.

Kompozyty włókniste składają się z co najmniej dwóch różnych materiałów: cienkich włókien o wysokim module sprężystości i dużej wytrzymałości oraz z jednorodnego materiału matrycy tzw. osnowy o niższej sztywności, wytrzymałości i gęstości.

Podstawowa warstwa tzw. lamina zbudowana jest z włókien wzmacniających ośrodek macierzysty, czyli matrycę. Matrycą najczęściej jest osnowa epoksydowa, winylowa, poliestrowa, ceramiczna lub metaliczna.

Włókna wzmacniające laminę zbudowane są z włókien syntetycznych lub organicznych o wysokiej wytrzymałości: BRFP ang. boron reinforced fiber plastic (borowe, ang. boron), CRFP (węglowe, ang. carbon), AFRP (aramidowe, ang. aramid), GRFP (szklane, ang. glass). Zadaniem matrycy jest zachowanie geometrii włókien, równomierne przenoszenie obciążenia pomiędzy poszczególnymi sąsiednimi włóknami i zapobieganie ich uszkodzeniom. Stanowi zarazem izolację termiczną, chemiczną, wilgotnościową oraz może mieć pożądaną odporność ogniową. Wzmacniające włókna są kilkakrotnie lżejsze od stali. Tworzywo wzmocnione włóknem węglowym (CFRP) ma bardzo wysoki moduł sprężystości Younga porównywalny z wartością modułu dla stali, bardzo wysoką wytrzymałość na rozciąganie nawet do 2 GPa, maksymalne odkształcenie względne odpowiadające zniszczeniu może wynosić nawet 2.0% i mały współczynnik rozszerzalności liniowej $\alpha = 2 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.



Rys. 1.1. Schemat analizy materiałów kompozytowych

Kompozyty warstwowe (tzw. laminaty) składają się z cienkich warstw połączonych ze sobą. Poszczególne warstwy (lamininy) zbudowane są najczęściej z kompozytów włóknistych o różnych kierunkach ułożenia włókien, przez co uzyskuje się struktury o różnych właściwościach materiałowych oraz pożądanej sztywności i wytrzymałości. Laminaty warstwowe są najczęściej stosowanymi kompozytami.

Materiały jednorodne łatwo pękają, natomiast w kompozytach włóknistych (tzw. niehomogenicznych) pęknięcia nie mają warunków do powiększania się. Kompozyty mogą przez to zmieniać swoje właściwości, a mimo to nadal gwarantować bezpieczeństwo. Można powiedzieć, że materiały te nie mają „wad wrodzonych”.

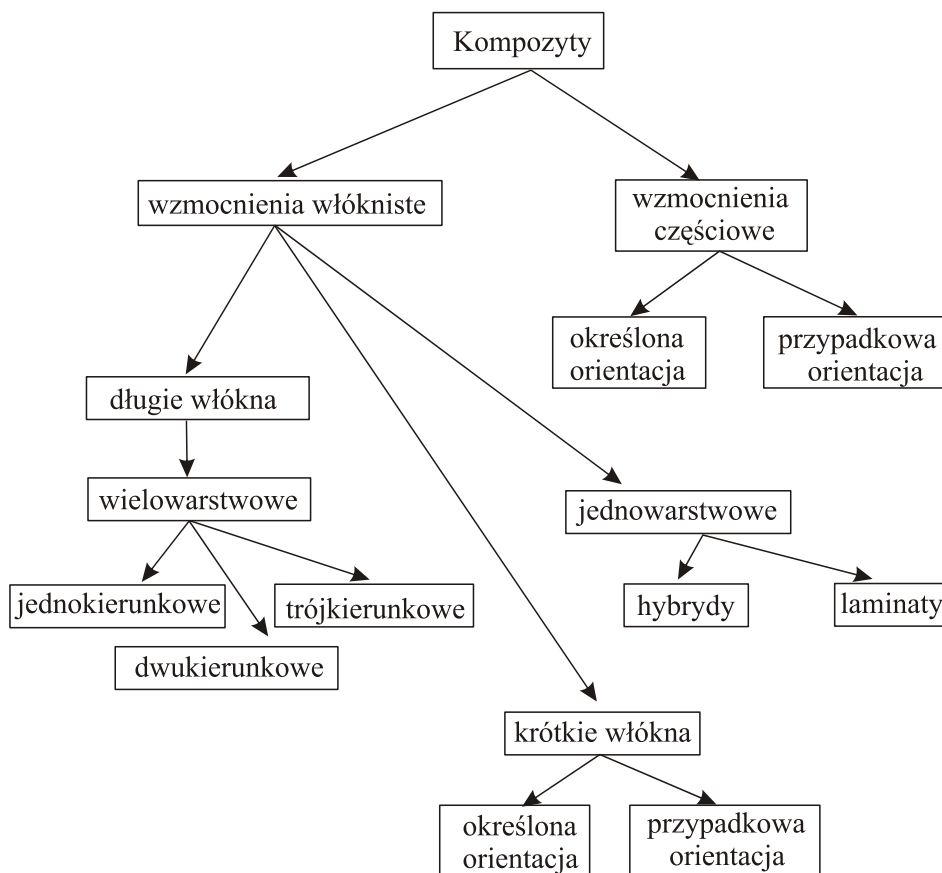


Tabela 1.1 *Klasyfikacja kompozytów*

Zaletami konstrukcji wielowarstwowych są między innymi: wysoka wytrzymałość, sztywność, korzystny stosunek masy konstrukcji do przenoszonego obciążenia przy zachowaniu lub polepszeniu właściwości użytkowych (np. dobre właściwości termoizolacyjne i wibroizolacyjne, odporność na korozję), odporność na obciążenie o charakterze zmęczeniowym, odpowiednie wykończenie powierzchni

zewewnętrznej, mały współczynnik rozszerzalności liniowej, dłuższy czas eksploatacji konstrukcji warstwowej w porównaniu z innymi konstrukcjami (np. w konstrukcjach wzmocnionymi żebrami - brak stref koncentracji naprężeń).

Głównymi zaś wadami są: dość trudna i kosztowna technologia wykonania, mała odporność konstrukcji na obciążenia skupione, delaminacja, podatność na utratę stateczności, niemożność stosowania powszechnie znanych kryteriów wytrzymałościowych (np. hipotezy maksymalnych naprężeń tnących, hipotezy Hubera-Misesa-Hencky'ego) oraz występowanie nieuniknionych niedokładności tzw. imperfekcji. Każda konstrukcja wymaga indywidualnego zaprojektowania, a analiza stanu naprężenia i odkształcenia musi dotyczyć poszczególnych warstw kompozytu. Ponadto odczuwa się istotny brak dostatecznej ilościowej i jakościowej weryfikacji doświadczalnej, przyjętych związków fizycznych opisujących rozkład naprężeń, odkształceń i przemieszczeń oraz skomplikowany model matematyczny konstrukcji kompozytowych wymuszający stosowanie uzasadnionych uproszczeń.

Imperfekcjami w konstrukcjach cienkościennych (tzw. odkształceniami początkowymi lub wstępnymi) są: odchylenie od idealnego geometrycznego kształtu konstrukcji, odchyłki wymiarowe, błędy montażowe, naprężenia wstępne, odchylenia we właściwościach materiałowych, niedokładność w sposobie obciążenia itp.

W rozważaniach ograniczono się do kompozytów warstwowych wzmocnionych długimi włóknami tzw. laminatów. Rozróżnia się kompozyty ze względu na materiał matrycy, materiał włókien, sposób ułożenia włókien, długość włókien. Model teoretyczny pozwala opisać zachowanie się także innych rodzajów kompozytów, które możemy traktować jako ośrodek jednorodny (np. materiał ortotropowy). Przykładowe połączenia dwóch składników tworzących materiały kompozytowe: szkło/epoksyd, Kevlar/epoksyd, bor/epoksyd, węgiel/epoksyd, Kevlar/poliester, szkło/winył.

Ze względu na wzrastające parametry i wymagania użytkownika opracowuje się coraz dokładniejsze i bardziej zgodne z rzeczywistymi konstrukcjami modele matematyczne pozwalające precyzyjniej opisać pracę złożonych struktur kompozytowych.

Modele takie wykorzystywane są w metodzie elementów skończonych (MES), która pozwala analizować pracę konstrukcji wykonanych z nowoczesnych materiałów, w tym z kompozytów. Wszystkie komercyjne pakiety posiadają taką możliwość.

Dalszy postęp w stosowaniu kompozytów może po prostu zależeć od lepszego wykształcenia konstruktorów i użytkowników. Wielu inżynierów nie wie, jak projektować konstrukcje kompozytowe, które ich „onieśmielają”. Wytrzymałość kompozytów w kierunku ułożenia włókien wzmacniających jest kilkakrotnie wyższa niż w pozostałych kierunkach. Nieprzewidziana zmiana kierunku lub charakteru obciążenia może skończyć się zniszczeniem kompozytu. Wymagają przez to większej uwagi przy ich projektowaniu niż metale.

W obecnej dobie inżynierzy-projektanci, konstruktorzy, a co za tym idzie studenci wydziałów inżynierskich, powinni umieć wykorzystywać wiedzę

o nowoczesnych materiałach konstrukcyjnych i „rozumieć” specyfikę pracy takich konstrukcji.

Programy nauczania w tej dziedzinie na uczelniach technicznych są bardzo ubogie. Zasadniczym celem tego skryptu jest zwrócenie uwagi na wybrane zagadnienia mechaniki i wytrzymałości materiałów ortotropowych i kompozytowych oraz przedstawienie głównych różnic pomiędzy mechaniką materiałów kompozytowych a materiałów izotropowych.

Autor zakłada, że Czytelnik tego skryptu posiada ogólną wiedzę z mechaniki i wytrzymałości materiałów wymaganą na studiach inżynierskich uczelni technicznych. Celem jest zapoznanie z głównymi podstawami mechaniki i wytrzymałości materiałów kompozytowych i ortotropowych, które mogą umożliwić zrozumienie tych problemów potrzebne do praktycznego wykorzystania w komercyjnych programach metody elementów skończonych itp. Powyższe względy zadecydowały o przyjęciu zapisu macierzowego w skrypcie.

W skrypcie nie uwzględniono właściwości kompozytów, fizyki i chemii kompozytów, delaminacji, technologii ich wykonania.

Znacznie bardziej pogłębioną wiedzę poruszaną w tym skrypcie Czytelnik znajdzie między innymi w pozycjach [1,2,7-9,15,16,23,24,28,30-32,36,38,40].

Przy opracowaniu tego skryptu autor częściowo wykorzystał monografię pod redakcją naukową prof. Katarzyny Kowal-Michalskiej „Stateczność dynamiczna kompozytowych konstrukcji płytowych” [21].

2. STAN NAPRĘŻENIA

2.1. Siły masowe i powierzchniowe

Rozważania dotyczyć będą dowolnego rodzaju ciał wypełnionych materią w sposób ciągły, bez przerw i luk, do których można stosować model ośrodka ciągłego. Pomija się zatem budowę rzeczywistą ciała – co najmniej budowę atomową ciała. W takim ośrodku możemy wyodrębnić dowolnie mały element i założyć, że jego właściwości fizyczne są takie same jak właściwości całego ciała. Takie podejście umożliwia także wprowadzenie pojęcia granicy matematycznej.

Rozważania zostaną ograniczone do ciał odkształcalnych znajdujących się w stanie naturalnym, czyli mające ściśle określone postaci, objętości i nie występują w nich naprężenie początkowe lub wstępne.

Rozpatrzono ciało poddane działaniu sił zewnętrznych. Oddziaływanie więzów zastąpiono oddziaływaniem odpowiednich sił. Rozważano zatem ciało, które pod działaniem wszystkich przyłożonych sił znajduje się w równowadze. Siły działające na dowolny element możemy podzielić na (rys. 2.1):

1. siły masowe \bar{X} – wywołane przyspieszeniami i proporcjonalne do masy zawartej w elemencie objętościowym ΔV (np. siły grawitacyjne, elektromagnetyczne);
2. siły powierzchniowe:
 - a) zewnętrzne – obciążenie zewnętrzne \bar{F} oraz reakcje więzów;
 - b) wewnętrzne \bar{S} – przedstawiają oddziaływanie odrzuconej umownie części ośrodka na część rozpatrywaną.

Jednostkową siłę masową w punkcie $M(\bar{x}) \equiv M(x_1, x_2, x_3)$ zdefiniowano wzorem:

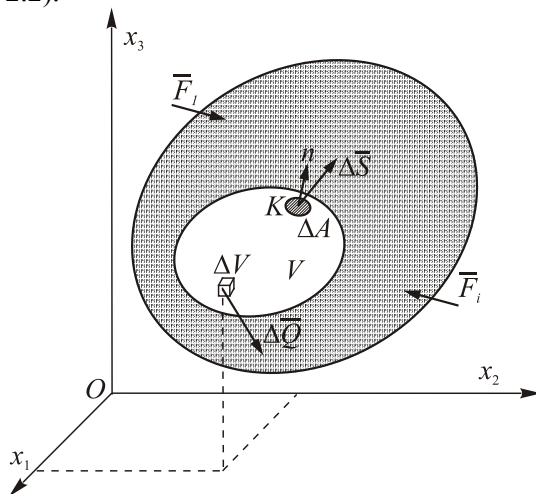
$$\bar{X} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{Q}}{\Delta V} \quad [\text{N/m}^3] \quad (2.1)$$

w którym: ΔV – objętość wybranego podobszaru ciała;
 $\Delta \bar{Q}$ – siła masowa przypadająca na wybrany podobszar ciała
np. ciężar elementu o objętości ΔV .

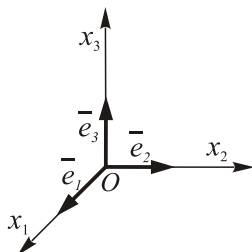
Siłę masową, która jest tylko funkcją współrzędnych (położenia), w prostokątnym układzie osi współrzędnych $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ można zapisać w postaci:

$$\bar{X} = X_1 \bar{e}_1 + X_2 \bar{e}_2 + X_3 \bar{e}_3 = \sum_{i=1}^3 X_i \bar{e}_i \quad (2.2)$$

gdzie: X_i – składowe jednostkowej siły masowej w kierunku osi x_i (tzn. X_1, X_2, X_3); \bar{e}_i – wektory bazy jednostkowej (tzn. $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$), czyli wersory osi (rys. 2.2).



Rys. 2.1. Ciało obciążone siłami masowymi i powierzchniowymi



Rys. 2.2. Układ współrzędnych z zaznaczonymi wersorami osi

Jednostkowa powierzchniowa siła wewnętrzna, nazywana naprężeniem, jest zdefiniowana wzorem:

$$\bar{\sigma}^n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{S}}{\Delta A} \quad [\text{N/m}^2] \quad (2.3)$$

gdzie: ΔA – pole powierzchni rozpatrywanego obszaru;

$\Delta \bar{S}$ – siła powierzchniowa przypadająca na element powierzchni ΔA .

Określony zależnością (2.3) wektor naprężenia $\bar{\sigma}^n$ nazywamy wektorem naprężenia w punkcie K . Działa on na element powierzchniowy z kierunkiem

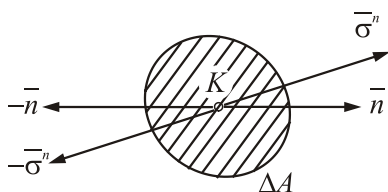
normalnej \bar{n} . Naprężenia zależą od współrzędnych oraz zmieniają się wraz ze zmianą kierunku normalnej \bar{n} do elementu powierzchni ΔA , tzn.:

$$\bar{\sigma}^n = \bar{\sigma}^n(\bar{x}, \bar{n}) \quad (2.4)$$

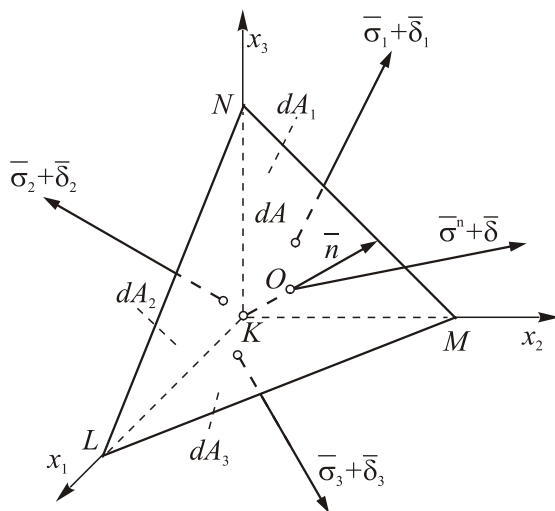
Dla wektorów naprężeń działających w jednym i tym samym punkcie K , ale skierowanych w przeciwnych kierunkach od elementu powierzchniowego (rys. 2.3) słuszne są zależności:

$$-\bar{\sigma}^n = \bar{\sigma}^{-n} \quad (2.5)$$

Powyższe zależności pozwalają opisać oddziaływanie części V_2 ciała na część V_1 ciała i na odwrót.



Rys. 2.3. Oddziaływanie naprężeń w tym samym punkcie K



Rys. 2.4. Naprężenia na ścianach czworościanu

2.2. Składowe stanu naprężenia

Naprężenie związane jest z wyborem elementu, który ma określoną orientację normalnej \bar{n} . W celu wyznaczenia zmienności naprężenia wraz ze zmianą orientacji elementu powierzchni dA ($dA \approx \Delta A$) wyodrębniono element objętości (rys. 2.4).

Przez punkt $K(\bar{x})$ ośrodka ciągłego poprowadzono trzy płaszczyzny równoległe do płaszczyzn przyjętego prostokątnego układu współrzędnych, zaś w bardzo małej odległości $h=OK$ od punktu K poprowadzono czwartą płaszczyznę z normalną zewnętrzną \bar{n} . Niech pole powierzchni tej ostatniej ściany wynosi dA , zaś objętość rozpatrywanego czworościanu wynosi $dV \approx \Delta V = h \cdot dA / 3$. Otrzymany w ten sposób czworościan $KLMN$ pokazano na rys. 2.4.

Oznaczmy siły powierzchniowe w punkcie K , o współrzędnych określonych wektorem $\bar{x} \equiv (x_1, x_2, x_3)$, działające na elementy powierzchni o normalnych zgodnych z wersorami \bar{e}_i osi, przez $\bar{\sigma}_i$ (tzn. $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3$). Siły powierzchniowe na ścianach czworościanu mogą różnić się od sił w punkcie K o nieskończenie małe wartości $\bar{\delta}_i$ (tzn. $\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2, \bar{\delta}_3$). Ze względu na założoną ciągłość pola naprężeń zakładamy, że gdy $h \rightarrow 0$, to $\bar{\delta}_i \rightarrow 0$.

Dla wektora naprężenia działającego na element o powierzchni dA słuszna jest zależność:

$$\bar{\sigma}^n = \sigma_1^n \bar{e}_1 + \sigma_2^n \bar{e}_2 + \sigma_3^n \bar{e}_3 = \sum_{i=1}^3 \sigma_i^n \bar{e}_i \quad (2.6)$$

Jednostkowy wektor normalnej zewnętrznej \bar{n} do dA można zapisać jako:

$$\bar{n} = n_1 \bar{e}_1 + n_2 \bar{e}_2 + n_3 \bar{e}_3 = \sum_{i=1}^3 n_i \bar{e}_i \quad (2.7)$$

a dla pozostałych powierzchni czworościanu (rzutów elementu dA) słuszne są związki:

$$dA_1 = n_1 dA, \quad dA_2 = n_2 dA, \quad dA_3 = n_3 dA \quad (2.8)$$

$$\text{czyli:} \quad dA_i = n_i dA \quad \text{dla } i=1,2,3. \quad (2.9)$$

Składowe normalnej \bar{n} są cosinusami kierunkowymi, tzn.

$$n_i = \cos(\bar{n}, \bar{e}_i) \quad (2.10)$$

gdzie \bar{e}_i oznacza wersor i -tej osi. Spełniają one ponadto zależność

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (2.11)$$

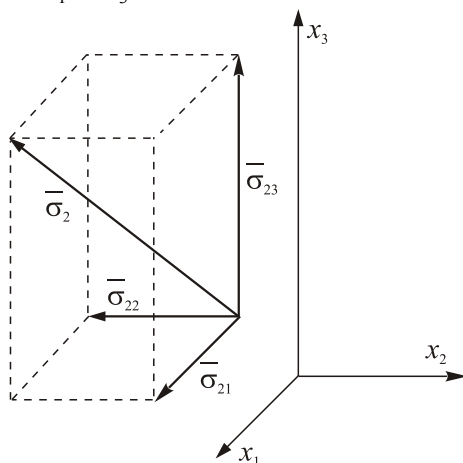
Rozłóżmy wektor naprężenia $\bar{\sigma}_i$ na składowe:

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_1 &= \sigma_{11}\bar{e}_1 + \sigma_{12}\bar{e}_2 + \sigma_{13}\bar{e}_3 \\
\bar{\sigma}_2 &= \sigma_{21}\bar{e}_1 + \sigma_{22}\bar{e}_2 + \sigma_{23}\bar{e}_3 \\
\bar{\sigma}_3 &= \sigma_{31}\bar{e}_1 + \sigma_{32}\bar{e}_2 + \sigma_{33}\bar{e}_3
\end{aligned} \tag{2.12}$$

lub krócej:

$$\bar{\sigma}_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \bar{e}_j \quad \text{dla } i=1,2,3. \tag{2.13}$$

Na rys. 2.5 pokazano przykładowy rozkład dla $\bar{\sigma}_2$. Identycznie można przedstawić rozkłady dla $\bar{\sigma}_1$ i $\bar{\sigma}_3$.



Rys. 2.5. Rozkład wektora naprężeń $\bar{\sigma}_2$

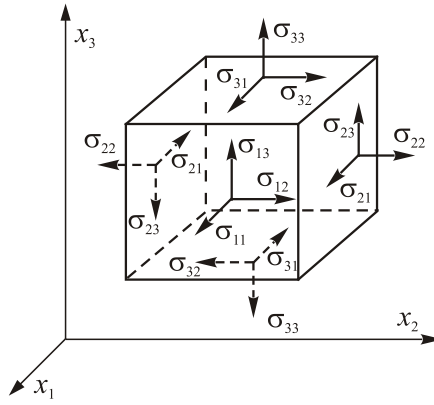
Składowe σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} , czyli σ_{ii} , nazywa się składowymi normalnymi stanu naprężenia (naprężeniami normalnymi), zaś pozostałe składowe σ_{12} , σ_{13} , σ_{21} , σ_{23} , σ_{31} , σ_{32} składowymi stycznymi (naprężeniami stycznymi).

Przyjęto następującą umowę dotyczącą indeksów składowych stanu naprężenia. Pierwszy indeks związany jest z kierunkiem normalnej do płaszczyzny przekroju (tzn. dana płaszczyzna jest prostopadła do danej osi układu współrzędnych). Drugi indeks dotyczy kierunku współrzędnej danej składowej. Dla przykładu omówiono σ_{23} . Pierwszy indeks 2 informuje, że element powierzchniowy jest prostopadły do osi x_2 , zaś indeks 3 oznacza, że kierunek składowej naprężenia jest równoległy do osi x_3 .

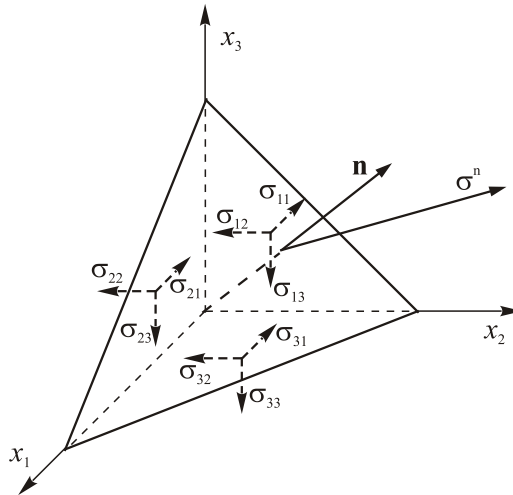
Na rys. 2.6 przedstawiono zwroty składowych stanu naprężenia przyjmując następującą umowę: jeśli zwrot dodatni normalnej zewnętrznej do rozpatrywanej ścianki jest zgodny z dodatnim zwrotem odpowiedniej osi, to dodatnie zwroty składowych stanu naprężenia są zgodne z dodatnimi zwrotami odpowiednich osi

współrzędnych, jeśli natomiast zwrot normalnej zewnętrznej jest przeciwny do dodatniego zwrotu odpowiedniej osi, to dodatnie zwroty składowych stanu naprężenia odpowiadają przeciwnym zwrotom do dodatnich zwrotów odpowiednich osi współrzędnych.

Dodatnie wartości $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ odpowiadają rozciąganiu, a ujemne wartości ścisaniu. Uwzględniając powyższe uwagi składowe stanu naprężenia σ_{ij} działające na rozpatrywany czworościan przedstawiono na rys. 2.7.



Rys. 2.6. Dodatnie składowe stanu naprężenia



Rys. 2.7. Składowe stanu naprężenia w punkcie K

Z warunku równowagi, na przykład rzutów wszystkich sił na kierunek osi x_1 mamy:

$$\sigma_1^n dA - \sigma_{11} dA_1 - \sigma_{21} dA_2 - \sigma_{31} dA_3 + X_1 dV = 0 \quad (2.14)$$

Uwzględniając (2.8) w (2.14) i po podzieleniu przez dA oraz przechodząc do granicy z $h \rightarrow 0$ otrzymujemy:

$$\sigma_1^n = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3 = \sum_{j=1}^3 \sigma_{j1}n_j \quad (2.15)$$

Postępując analogicznie otrzymujemy pozostałe dwa równania:

$$\sigma_2^n = \sum_{j=1}^3 \sigma_{j2}n_j \quad \text{ i } \quad \sigma_3^n = \sum_{j=1}^3 \sigma_{j3}n_j \quad (2.16)$$

Zależności (2.15) i (2.16) można krócej zapisać w postaci

$$\sigma_i^n = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji}n_j \quad \text{ dla } i=1,2,3. \quad (2.17)$$

Z równań (2.17) wynika, że stan naprężenia w punkcie $K(x_i)$ ciała jest jednoznacznie określony przez dziewięć składowych stanu naprężenia σ_{ij} . Można zatem stwierdzić, że dowolnemu kierunkowi normalnej \bar{n} w punkcie K przyporządkowano składowe stanu naprężenia, które w zapisie macierzowym mają postać:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

2.3. Równania równowagi

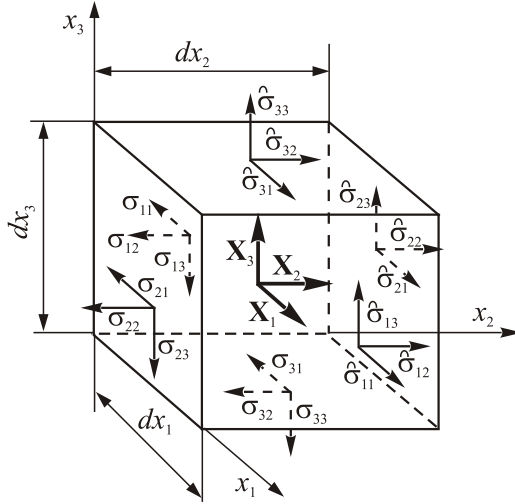
W mechanice ciał doskonale sztywnych układ sześciu równań równowagi jednoznacznie charakteryzuje jego stan równowagi. Zaś w przypadku ciała odkształcalnego układ sześciu równań równowagi nie opisuje już wszystkich stanów równowagi ciała jako całości. Warunki równowagi muszą być spełnione przez każdy wyodrębniony element ciała.

Rozpatrzmy stan równowagi statycznej nieskończenie małego prostopadłościanu o ścianach równoległych do płaszczyzn współrzędnych (rys. 2.8). Aby element ten pozostawał w równowadze należy zastąpić oddziaływanie otaczającej części ciała siłami powierzchniowymi (naprężeniami) i siłami masowymi. Wypadkowe sił powierzchniowych przyłożone są w środkach ciężkości poszczególnych ścianek. W rozważaniach uwzględniono wartość średnią naprężeń dla każdej ścianki. Wypadkową sił masowych odniesioną do jednostki objętości przyłożono w środku ciężkości całego prostopadłościennego elementu.

Zakładając niejednorodny stan naprężenia musimy uwzględnić zmianę składowych stanu naprężenia w kierunkach osi współrzędnych. Zmiany te zapiszemy jako różniczki wyrażające przyrost danej składowej wywołany przyro-

stem odpowiedniej współrzędnej przy przejściu w kierunku prostopadłym do ścianki. Wymaga to założenia, że składowe naprężeń σ_{ij} oraz ich pierwsze pochodne są funkcjami ciągłymi względem współrzędnych. Oprócz tego założono, że deformacje są tak małe, że równania równowagi można sformułować dla nieodkształconego elementu prostopadłościennego.

Naprężenia działające na poszczególnych ściankach przedstawiono na rys. 2.8.



Rys. 2.8. *Naprężenia działające na nieskończenie mały prostopadłościan*

Jeśli składowe naprężeń występują na ściance o normalnej zewnętrznej:

- $-\bar{e}_1$ (prostopadłej do osi x_1): $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$;
- $-\bar{e}_2$ (prostopadłej do osi x_2): $\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}$;
- $-\bar{e}_3$ (prostopadłej do osi x_3): $\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}$,

to na ściance przeciwległej będą działać składowe naprężeń z przyrostami:

- \bar{e}_1 (prostopadłej do osi x_1): $\hat{\sigma}_{11}, \hat{\sigma}_{12}, \hat{\sigma}_{13}$;
- \bar{e}_2 (prostopadłej do osi x_2): $\hat{\sigma}_{21}, \hat{\sigma}_{22}, \hat{\sigma}_{23}$;
- \bar{e}_3 (prostopadłej do osi x_3): $\hat{\sigma}_{31}, \hat{\sigma}_{32}, \hat{\sigma}_{33}$.

Przy tym:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{11} &= \sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 & \hat{\sigma}_{12} &= \sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} dx_1 & \hat{\sigma}_{13} &= \sigma_{13} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} dx_1 \\ \hat{\sigma}_{21} &= \sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 & \hat{\sigma}_{22} &= \sigma_{22} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} dx_2 & \hat{\sigma}_{23} &= \sigma_{23} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} dx_2 \\ \hat{\sigma}_{31} &= \sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} dx_3 & \hat{\sigma}_{32} &= \sigma_{32} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} dx_3 & \hat{\sigma}_{33} &= \sigma_{33} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} dx_3\end{aligned}$$

(2.19)

Sumę rzutów wszystkich sił działających w kierunku osi x_1 (rys. 2.9a) można zapisać:

$$\begin{aligned} & -\sigma_{11}dx_2dx_3 + \left(\sigma_{11} + \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}dx_1\right)dx_2dx_3 - \sigma_{21}dx_1dx_3 + \left(\sigma_{21} + \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}dx_2\right)dx_1dx_3 \\ & - \sigma_{31}dx_1dx_2 + \left(\sigma_{31} + \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}dx_3\right)dx_1dx_2 + X_1dx_1dx_2dx_3 = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Po otwarciu nawiasów, zredukowaniu i podzieleniu przez element objętości $dx_1dx_2dx_3$ otrzymano:

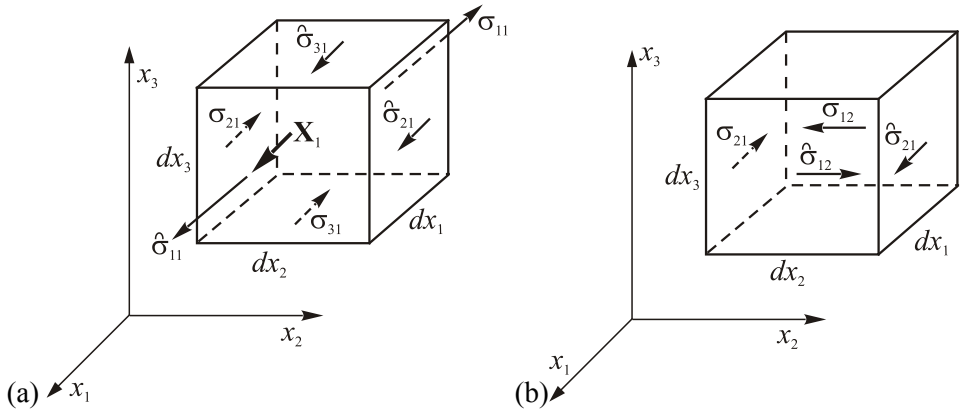
$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3} + X_1 = 0 \quad (2.21)$$

W analogiczny sposób sformułowano pozostałe równania rzutów sił:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_3} + X_2 &= 0 \\ \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3} + X_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

lub w bardziej skróconej formie:

$$\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i} + X_j \right) = 0 \quad \text{dla } j=1, 2, 3. \quad (2.23)$$



Rys. 2.9. Składowe naprężeń dających sumę rzutów sił działających w kierunku x_1 (a) i dających moment względem osi równoległej do x_3 (b)

Warunkiem równowagi jest także warunek znikania wypadkowego momentu względem dowolnego punktu. W tym celu zapisano warunek równowagi

momentów sił względem osi równoległej do osi x_3 i przechodzącej przez środek ciężkości elementu prostopadłościennego (rys. 2.9b) w postaci:

$$\begin{aligned} \sigma_{12} dx_2 dx_3 \frac{dx_1}{2} + (\sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} dx_1) dx_2 dx_3 \frac{dx_1}{2} \\ - \sigma_{21} dx_1 dx_3 \frac{dx_2}{2} - (\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2) dx_1 dx_3 \frac{dx_2}{2} = 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

skąd po podzieleniu przez $dx_1 dx_2 dx_3$ mamy:

$$2\sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} dx_1 = 2\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 \quad (2.25)$$

Przechodząc do granicy przy $dx_1 \rightarrow 0$ i $dx_2 \rightarrow 0$ otrzymano

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad (2.26)$$

Analogicznie można otrzymać zależności:

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} \quad \text{ i } \quad \sigma_{23} = \sigma_{32} \quad (2.27)$$

W ogólnym przypadku równowagi ciała, na podstawie (2.26) i (2.27), składowe stanu naprężenia są symetryczne tzn.:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.28)$$

Z prawa zachowania krętu otrzymuje się identyczną zależność. Z równań (2.17) i (2.28) wynika, że stan naprężenia w punkcie $K(x_i)$ ciała jest jednoznacznie określony przez sześć niezależnych składowych stanu naprężenia σ_{ij} .

2.4. Transformacja składowych stanu naprężenia

Jeżeli znane są składowe stanu naprężenia σ_{ij} w kartezjańskim układzie współrzędnych x_i , to po przejściu do nowego obróconego kartezjańskiego układu współrzędnych x_i^* (rys. 2.10) składowe wyrażają się następującymi wzorami

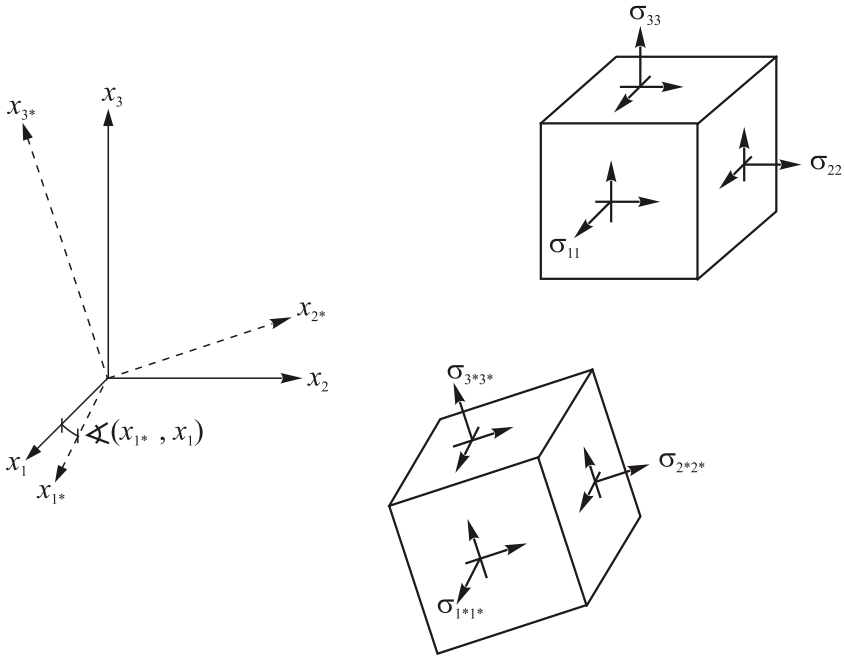
$$\sigma_{i^*j^*} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 c_{ik} c_{jl} \sigma_{kl} \quad \text{ dla } i=1,2,3; \quad j=1,2,3. \quad (2.29)$$

$$\text{gdzie: } c_{ik} = \cos(\bar{e}_{i^*}, \bar{e}_k) \quad (2.30)$$

Wzory te umożliwiają przeliczenie składowych stanu naprężenia działających w danym punkcie na naprężenia w tym samym punkcie, ale znajdującym

się w nowym obroconym układzie współrzędnych kartezjańskich. Przykładowo rozpisano zależności (2.29) dla $i^* = 1$ i $j^* = 1, 2$:

$$\begin{aligned}\sigma_{1^*1^*} &= \sigma_{11}c_{11}^2 + \sigma_{22}c_{12}^2 + \sigma_{33}c_{13}^2 + (\sigma_{12} + \sigma_{21})c_{11}c_{12} + (\sigma_{13} + \sigma_{31})c_{11}c_{13} + \\ &\quad + (\sigma_{23} + \sigma_{32})c_{12}c_{13} \\ \sigma_{1^*2^*} &= (\sigma_{11}c_{11} + \sigma_{21}c_{12} + \sigma_{31}c_{13})c_{21} + (\sigma_{12}c_{11} + \sigma_{22}c_{12} + \sigma_{32}c_{13})c_{22} + \\ &\quad + (\sigma_{13}c_{11} + \sigma_{23}c_{12} + \sigma_{33}c_{13})c_{23}\end{aligned}\quad (2.31)$$



Rys. 2.10 Składowe stanu naprężenia w obroconym układzie

W powyższych zależnościach dla większej czytelności zapisu nie uwzględniono zależności (2.28) tzn. $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

Dla płaskiego stanu naprężenia w płaszczyźnie $x_1 - x_2$ (tzn. dla $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$) w obroconym o kąt $\varphi \rightarrow (\bar{e}_1^*, \bar{e}_1)$ kartezjańskim układzie współrzędnych x_1^*, x_2^*, x_3^* , w którym $x_3^* = x_3$:

$$\begin{aligned}\sigma_{1^*1^*} &= \sigma_{11} \cos^2 \varphi + \sigma_{22} \sin^2 \varphi + 2\sigma_{12} \sin \varphi \cos \varphi \\ \sigma_{2^*2^*} &= \sigma_{11} \sin^2 \varphi + \sigma_{22} \cos^2 \varphi - 2\sigma_{12} \sin \varphi \cos \varphi \\ \sigma_{1^*2^*} &= -(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin \varphi \cos \varphi + \sigma_{12} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)\end{aligned}\quad (2.32)$$

gdzie uwzględniono zgodnie z rys. 2.10, że

$$\begin{aligned}c_{11} &= \cos(\bar{e}_1^*, \bar{e}_1) = \cos \varphi, \\c_{22} &= \cos(\bar{e}_2^*, \bar{e}_2) = \cos \varphi, \\c_{12} &= \cos(\bar{e}_1^*, \bar{e}_2) = \cos(\pi/2 - \varphi) = \sin \varphi, \\c_{21} &= \cos(\bar{e}_2^*, \bar{e}_1) = \cos(\pi/2 + \varphi) = -\sin \varphi.\end{aligned}$$

Wzory (2.32) w formie graficznej przedstawiają koło Mohra znane z wytrzymałości materiałów.

2.5. Niezmienniki stanu naprężenia

Przy obrocie układu współrzędnych składowe stanu naprężenia ulegają transformacji. Wynika stąd pytanie o ekstrema naprężenia normalnego w ustalonym punkcie ciała ze względu na kierunek normalnej \bar{n} do badanego przekroju. Pytanie to związane jest z określeniem wartości własnych składowych stanu naprężenia.

W przypadku ogólnym wektor naprężenia nie jest prostopadły do elementu powierzchniowego dA (rys. 2.7). Kierunek główny naprężenia σ wyznacza normalna \bar{n} do elementu powierzchni, na którym naprężenia normalne przyjmują wartości ekstremalne, a składowe styczne stanu naprężenia znikają. Układ równań dla kierunków głównych można, zgodnie z (2.17), zapisać w postaci

$$\sigma_i^n = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j = \sigma n_i \quad \text{lub} \quad \sum_{j=1}^3 (\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_j = 0 \quad \text{dla } i=1,2,3, \quad (2.33)$$

$$\text{gdzie: delta Kroneckera } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i=j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases} \quad (2.34)$$

Równanie charakterystyczne będące warunkiem nietrywialnego rozwiązania układu (2.33) ma postać:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (2.35)$$

lub po rozwinięciu wyznacznika (2.35):

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0 \quad (2.36)$$

Pierwiastki równania (2.35) lub (2.36) $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*$ nazywamy wartościami głównymi naprężeń, zaś współczynniki równania (2.36) niezmiennikami stanu naprężenia, które wyrażają się równaniami:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 3\sigma_m \quad (\text{tzw. ślad jądra}) \\
I_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} \\
I_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

$$\text{gdzie napężenie średnie: } \sigma_m = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3 \tag{2.38}$$

Z drugiej strony, jeśli $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*$ są pierwiastkami (2.35) lub (2.36), to równanie (2.36) można przedstawić w postaci:

$$(\sigma - \sigma_1^*)(\sigma - \sigma_2^*)(\sigma - \sigma_3^*) = 0 \tag{2.39}$$

i wtedy słuszne są następujące związki pomiędzy pierwiastkami:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sigma_1^* + \sigma_2^* + \sigma_3^* = 3\sigma_m \\
I_2 &= \sigma_1^* \sigma_2^* + \sigma_2^* \sigma_3^* + \sigma_1^* \sigma_3^* \\
I_3 &= \sigma_1^* \sigma_2^* \sigma_3^*
\end{aligned} \tag{2.40}$$

$$\text{gdzie: } \sigma_m = (\sigma_1^* + \sigma_2^* + \sigma_3^*)/3 \tag{2.41}$$

Napężenia główne w danym punkcie są niezależne od każdego dowolnego układu osi współrzędnych. Dlatego wyrażenia I_1, I_2, I_3 są niezmiennikami przekształceń układu współrzędnych. Ze względu na stopień niezmienniki nazywamy: I_1 –liniowym, I_2 – kwadratowym, I_3 – sześciennym.

Odpowiadające naprężeniom głównym trzy wzajemnie prostopadłe kierunki \bar{n}_i^* nazywamy kierunkami głównymi stanu naprężenia w punkcie K .

Weźmy pod uwagę dwie różne wartości naprężeń głównych σ_1^* i σ_2^* oraz odpowiadające im wektory jednostkowe oznaczone jako $\bar{n}^{*(1)}$ i $\bar{n}^{*(2)}$ (odpowiednio ze składowymi $n_i^{*(1)}$ i $n_i^{*(2)}$ dla $i=1,2,3$). Wówczas z (2.33) mamy:

$$\sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j^{(1)} = \sigma_1^* n_i^{*(1)} \qquad \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j^{(2)} = \sigma_2^* n_i^{*(2)} \tag{2.42}$$

Mnożąc powyższe równania, odpowiednio, przez $n_i^{*(2)}$ i $n_i^{*(1)}$, sumując po i oraz odejmując od siebie otrzymujemy:

$$\sum_{i=1}^3 (\sigma_1^* - \sigma_2^*) n_i^{*(1)} n_i^{*(2)} = 0 \quad (2.43)$$

Zgodnie z założeniem, że $\sigma_1^* \neq \sigma_2^*$ dla (2.43) musi zachodzić równość

$$\sum_{i=1}^3 n_i^{*(1)} n_i^{*(2)} = 0 \quad (2.44)$$

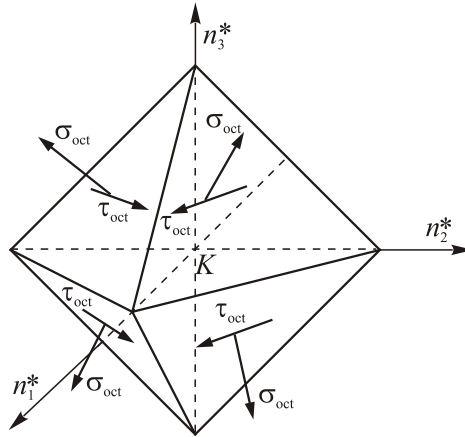
Lewa strona powyższej zależności jest iloczynem skalarnym wektorów $\vec{n}^{*(1)}$ i $\vec{n}^{*(2)}$. Ponieważ iloczyn skalarny jest równy zero, to wektory te są wzajemnie prostopadłe, czyli $\vec{n}^{*(1)} \perp \vec{n}^{*(2)}$.

2.6. Naprężenia oktaedryczne

Stan naprężenia w punkcie K odkształcalnego ciała można także scharakteryzować w przekrojach jednakowo nachylonych względem trzech kierunków głównych, zgodnie z (2.11), w następujący sposób:

$$n_1 = n_2 = n_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (2.45)$$

Przekrój taki nazywa się przekrojem oktaedrycznym. Przekroje te tworzą ośmiościan foremny w układzie osi kierunków głównych stanu naprężenia w danym punkcie.



Rys. 2.11. Naprężenia oktaedryczne

Składowa normalna naprężenia oktaedrycznego σ_{oct} (rys. 2.11) wyraża się wzorem:

$$\sigma_{oct} = (\sigma_1^* + \sigma_2^* + \sigma_3^*)/3 = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3 = \sigma_m = I_1/3 \quad (2.46)$$

zaś składowa styczna naprężenia oktaedrycznego τ_{oct} wzorem:

$$\begin{aligned}\tau_{oct} &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1^* - \sigma_2^*)^2 + (\sigma_2^* - \sigma_3^*)^2 + (\sigma_3^* - \sigma_1^*)^2} = \\ &= \frac{1}{3} \left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2) \right]^{1/2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{I_1^2 - 3I_2}\end{aligned}\quad (2.47)$$

Kierunki składowych τ_{oct} zależą od stosunku wartości naprężeń głównych $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*$.

Można także wprowadzić następujący niezmiennik stanu naprężenia nazywany naprężeniem efektywnym lub intensywnością naprężeń:

$$\sigma_{eff}^{def} = \sigma_{int}^{def} = \sqrt{I_1^2 - 3I_2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \tau_{oct} \quad (2.48)$$

2.7. Niezmienniki aksjatora i dewiatora naprężenia

Wyrażone zależnością (2.18) składowe stanu naprężenia σ_{ij} w punkcie $K(x_i)$ ciała stanowią kwadratową dziewięcioelementową macierz (tablicę) symetryczną (2.28). Kwadratową macierz (2.18) $[\sigma_{ij}]$ można rozłożyć na dwie macierze

$$\begin{aligned}T_\sigma = [\sigma_{ij}] &= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_m & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_m & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_m \end{bmatrix} = A_\sigma + D_\sigma\end{aligned}\quad (2.49)$$

gdzie wprowadzono oznaczenie $T_\sigma = [\sigma_{ij}]$ (2.50)

Pierwsza składowa macierz (2.49) w odniesieniu do stanu naprężenia

$$A_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

nosi nazwę aksjatora naprężenia lub części kulistej T_σ . Aksjator naprężenia opisuje stan naprężenia występujący przy równomiernym wszechstronnym rozciąganiu lub ściskania (tzw. stan hydrostatyczny).

Przez analogię do (2.36) niezmienniki aksjatora (części kulistej) naprężeń A_σ :

- niezmiennik liniowy: $I_{1a} = 3\sigma_m = I_1 = 3\sigma_{oct}$ (2.52)

- niezmiennik kwadratowy: $I_{2a} = 3\sigma_m^2 = I_{1a}^2 / 3 = I_1^2 / 3 = 3\sigma_{oct}^2$ (2.53)

- niezmiennik sześcienny: $I_{3a} = \sigma_m^3 = I_1^3 = \sigma_{oct}^3$ (2.54)

Druga macierz w zależności (2.49)

$$D_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_m & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_m & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_m \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

nosi nazwę dewiatora naprężenia D_σ . Jak łatwo zauważyć pomiędzy współrzędnymi dewiatora tylko pięć wielkości jest niezależnych.

Niezmienniki dewiatora naprężenia D_σ :

- niezmiennik liniowy:

$$I_{1d} = (\sigma_{11} - \sigma_m) + (\sigma_{22} - \sigma_m) + (\sigma_{33} - \sigma_m) = \sigma_1^* + \sigma_2^* + \sigma_3^* = 0 \quad (2.56)$$

- niezmiennik kwadratowy:

$$\begin{aligned} I_{2d} &= -\frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)] = \\ &= -\frac{1}{6} [(\sigma_1^* - \sigma_2^*)^2 + (\sigma_2^* - \sigma_3^*)^2 + (\sigma_3^* - \sigma_1^*)^2] = \\ &= -\frac{3}{2} \tau_{oct}^2 = -3\sigma_m^2 + I_2 = -\frac{1}{3} I_1^2 + I_2 \end{aligned} \quad (2.57)$$

- niezmiennik sześcienny:

$$I_{3d} = I_3 + I_2\sigma_m + 2\sigma_m^3 = I_3 - I_{2d}\sigma_m - \sigma_m^3 \quad (2.58)$$

W przypadku dewiatora naprężenia ze względu na zależność (2.56) mówimy o przypadku czystego ścinania.

Z równań (2.46) i (2.52) widać, że σ_{oct} można traktować jako niezmiennik proporcjonalny do liniowego niezmiennika aksjatora I_{1a} , zaś na podstawie równań (2.47) i (2.57) naprężenie τ_{oct} jest proporcjonalne do pierwiastka kwadratowego z niezmiennika kwadratowego dewiatora I_{2d} :

$$\sigma_{oct} = I_{1a} / 3 \quad \tau_{oct} = \sqrt{-\frac{2}{3} I_{2d}} \quad (2.59)$$

Czasami wprowadza się także niezmienniki Burzyńskiego zdefiniowane następująco:

$$\omega_1 = \sigma_{oct} \quad \omega_2 = \tau_{oct} \quad (2.60)$$

które odgrywają dużą rolę w wytrzymałości złożonej i teorii plastyczności.

Przedstawione w tym rozdziale zależności nie zależą od deformacji i właściwości materiałowych, a zatem są słuszne zarówno dla materiałów izotropowych jak i anizotropowych.

3. STAN ODKSZTAŁCENIA

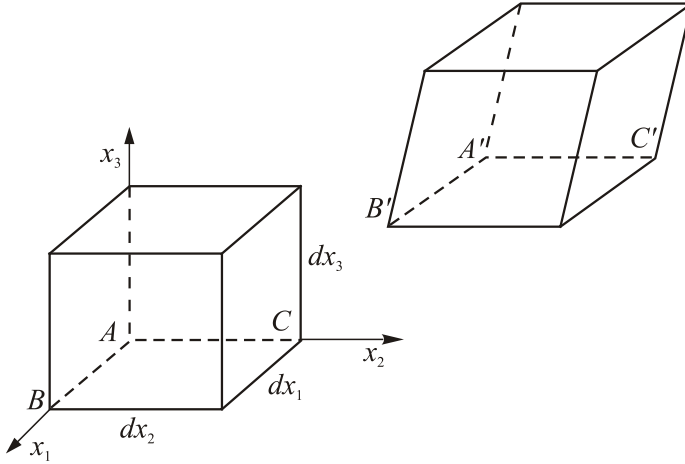
Działanie sił zewnętrznych powoduje deformacje w rzeczywistych ciałach odkształcalnych. Zadaniem mechaniki ośrodków ciągłych (w tym mechaniki ciała odkształcalnego, teorii sprężystości i wytrzymałości materiałów) jest opis deformacji ciała dzięki uwzględnieniu kinematyki ciała odkształcalnego. Jest to zagadnienie czysto geometryczne, a przyczyny deformacji i właściwości materiału nie odgrywają żadnej roli.

Podczas obciążenia ciała pod działaniem sił zewnętrznych punkty materialne zmieniają swoje położenie w przestrzeni. Wobec założenia ciągłości ośrodka, zakładamy jednocześnie, że deformacja ciała jest ciągła, bez luk, szczelin, rozrywania. Podczas ruchu ciała odkształcalnego następuje zmiana kształtu ciała tzn. wszystkie punkty ciała doznają przemieszczeń zgodnie z przyjętymi warunkami brzegowymi. Do opisu tych zmian wprowadza się pojęcie deformacji ciała. Pojęcie to, w odróżnieniu od ruchu, odnosi się do zmiany kształtu ciała w skończonym przedziale czasu pomiędzy *konfiguracją początkową* (kształt ciała przyjęty za wyjściowy, nie zdeformowany) i *konfigurację końcową*, w której kształt ciała uległ zmianie. Założono więc tylko kształt konfiguracji początkowej i końcowej nie analizując konfiguracji pośrednich. Na tym polega różnica pomiędzy badaniem ruchu ciała a badaniem jego deformacji. Metoda określenia deformacji polega na tym, że na podstawie przemieszczeń ciała odkształcalnego wyznaczamy zmianę długości liniowych elementów, a także zmianę kątów pomiędzy dwiema liniami elementów. Określenie deformacji polega na porównaniu przemieszczeń ciała odkształcalnego i ciała doskonale sztywnego, a zatem nie zależy od charakteru i przyczyny deformacji. Deformacje można rozpatrywać jako odwzorowanie ciała nieodkształcalnego (sztywnego) na ciało odkształcalne.

3.1. Składowe nieskończenie małych odkształceń w kartezjańskim układzie współrzędnych

Weźmy pod uwagę pewien obszar przestrzenny będący ciągłym ośrodkiem materialnym i obierzmy w nim trzy sąsiednie punkty A, B, C (rys. 3.1). Załóżmy, że położenie punktów A, B, C odpowiada stanowi konfiguracji początkowej. Po obciążeniu te same punkty ośrodka materialnego przyjmą położenia stanu końcowego A', B', C' . Opisując odkształcenia zakładamy, że przekształcenie ośrodka jest liniowo jednorodne. Odkształcenia otoczenia punktów są

opisane przez zmiany długości bardzo małych odcinków i zmiany kątów pomiędzy tymi odcinkami. W tym skrypcie omówiono jedynie małe odkształcenia (czasami też nazywane w literaturze nieskończenie małymi) w prostokątnym układzie współrzędnych. W tym przypadku gradienty przemieszczeń są małe w porównaniu z jednością.



Rys. 3.1 Odkształcenie ośrodka materialnego

W przypadku małych odkształceń najczęściej przyjmuje się miarę odkształceń Cauchy'ego, tzn.

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{\ell_k - \ell_p}{\ell_p} = \frac{\ell_k}{\ell_p} - 1 \quad (3.1)$$

W mechanice ośrodków ciągłych przyjmuje się także, ale bardzo rzadko, inne miary odkształceń – np. miara Hencky'ego:

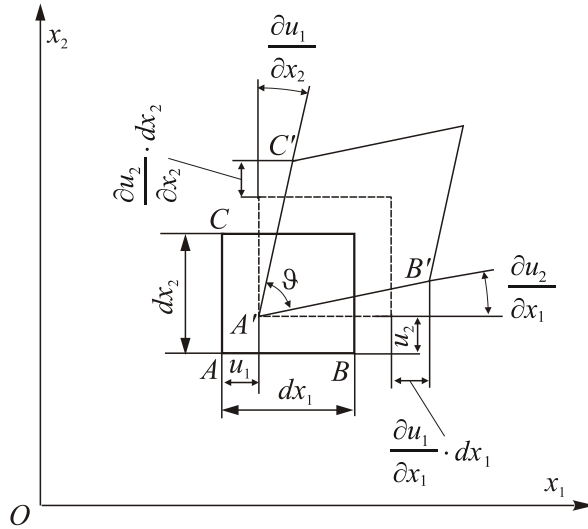
$$\varepsilon = \ln \frac{\ell_k}{\ell_p} \quad (3.2)$$

Rozpatrzmy elementarny prostopadłościan o krawędziach równoległych do osi x_1, x_2, x_3 kartezjańskiego układu współrzędnych i obierzmy dany punkt ciała będący jednocześnie początkiem tego układu. Na rys. 3.1 pokazano także zasadnicze fazy przekształcania prostopadłościanu w równoległościan: przemieszczenie i obrót jako ciała doskonale sztywnego oraz wydłużenie boków i pochylenie względem siebie krawędzi. W odniesieniu do tego prostopadłościanu małe odkształcenia możemy interpretować geometrycznie.

Rozpatrzmy najpierw składowe stanu odkształcenia w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny $x_1 - x_2$ (rys. 3.2).

Odształcenie liniowe prostopadłościanu określa rozsuniecie dwóch przeciwnych ścian, a zatem:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{(dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1) - dx_1}{dx_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \varepsilon_{22} &= \frac{A'C' - AC}{AC} = \frac{(dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2) - dx_2}{dx_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\end{aligned}\quad (3.3)$$



Rys. 3.2 Składowe stanu odkształcenia w płaszczyźnie $x_1 - x_2$

Odształcenie postaciowe prostopadłościanu określa zmianę kąta prostego zawartego, na przykład w płaszczyźnie $x_1 - x_2$, pomiędzy elementami AC i AB (rys.3.2):

$$\gamma_{12} = \frac{\pi}{2} - \vartheta = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad (3.4)$$

Wprowadzono następnie składową odkształcenia postaciowego, którą zdefiniowano następująco:

$$\varepsilon_{12} = \frac{\gamma_{12}}{2} \quad (3.5)$$

Postępując analogicznie otrzymujemy ostatecznie wzory na składowe stanu odkształcenia małych deformacji w postaci:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\
\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \gamma_{12} / 2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \\
\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \gamma_{23} / 2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\
\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \gamma_{13} / 2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Podobnie jak dla składowych stanu naprężenia także w przypadku składowych stanu odkształcenia słuszną jest zależność:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad \text{czyli} \quad \gamma_{ij} = \gamma_{ji} \tag{3.7}$$

co już zostało wykorzystane w równaniach (3.6). Równania (3.6) są czasami nazywane równaniami kinematycznymi.

Odształcenia te można zapisać w postaci tablicy kwadratowej:

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{\gamma_{12}}{2} & \frac{\gamma_{13}}{2} \\ \frac{\gamma_{21}}{2} & \varepsilon_{22} & \frac{\gamma_{23}}{2} \\ \frac{\gamma_{31}}{2} & \frac{\gamma_{32}}{2} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

Należy zwrócić szczególną uwagę, że składowe małych odkształceń o różnych indeksach są równe połowie kąta odkształcenia postaciowego, ponieważ wówczas transformują się identycznie jak składowe stanu naprężenia (2.29):

$$\varepsilon_{i^*j^*} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 c_{ik} c_{jl} \varepsilon_{kl} \tag{3.9}$$

A zatem składowe stanu odkształcenia mają właściwości analogiczne do składowych stanu naprężenia. Odształcenia liniowe ε_{ii} ($i=1,2,3$) są dodatnie, gdy nastąpi zwiększenie długości odcinka, zaś odkształcenia postaciowe $2\varepsilon_{ij} = \gamma_{ij}$ (dla $i \neq j$) uważamy za dodatnie, gdy nastąpi zmniejszenie kąta (pierwotnie prostego) pomiędzy dwoma odcinkami.

3.2. Niezmienniki stanu odkształcenia

Z analogii składowych stanu naprężenia i stanu odkształcenia wypływają następujące wnioski dla tego ostatniego stanu:

1. W każdym punkcie ciała istnieją trzy parami prostopadłe kierunki, dla których odkształcenia liniowe ε_{ii} osiągają wartości ekstremalne $\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \varepsilon_3^*$. Odkształcenia te noszą nazwę odkształceń głównych, zaś ich kierunki – kierunków głównych odkształceń. Dla tych kierunków odkształcenia postaciowe $2\varepsilon_{ij} = \gamma_{ij}$ (dla $i \neq j$) są równe zero.
2. Odkształcenia główne wyznacza się z analogicznego do (2.36) równania:

$$\varepsilon^3 - J_1 \varepsilon^2 + J_2 \varepsilon - J_3 = 0 \quad (3.10)$$

gdzie niezmienniki stanu odkształcenia mają postać:

- Niezmiennik liniowy J_1

$$J_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_1^* + \varepsilon_2^* + \varepsilon_3^* = 3\varepsilon_m \quad (3.11)$$

przy czym wprowadzono pojęcie odkształcenia średniego

$$\varepsilon_m = (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})/3 = (\varepsilon_1^* + \varepsilon_2^* + \varepsilon_3^*)/3 \quad (3.12)$$

- Niezmiennik kwadratowy J_2

$$J_2 = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{\gamma_{12}}{2} \\ \frac{\gamma_{21}}{2} & \varepsilon_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{22} & \frac{\gamma_{23}}{2} \\ \frac{\gamma_{32}}{2} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{\gamma_{13}}{2} \\ \frac{\gamma_{31}}{2} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} = \varepsilon_1^* \varepsilon_2^* + \varepsilon_2^* \varepsilon_3^* + \varepsilon_3^* \varepsilon_1^* \quad (3.13)$$

- Niezmiennik sześcienny J_3

$$J_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{\gamma_{12}}{2} & \frac{\gamma_{13}}{2} \\ \frac{\gamma_{21}}{2} & \varepsilon_{22} & \frac{\gamma_{23}}{2} \\ \frac{\gamma_{31}}{2} & \frac{\gamma_{32}}{2} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} = \varepsilon_1^* \varepsilon_2^* \varepsilon_3^* \quad (3.14)$$

3. Odkształcenia oktaedryczne wynoszą:

$$\varepsilon_{oct} = (\varepsilon_1^* + \varepsilon_2^* + \varepsilon_3^*)/3 = \varepsilon_m = J_1/3 \quad (3.15)$$

$$\frac{\gamma_{oct}}{2} = \frac{1}{3} \sqrt{(\varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*)^2 + (\varepsilon_2^* - \varepsilon_3^*)^2 + (\varepsilon_3^* - \varepsilon_1^*)^2} = \frac{1}{3} \sqrt{2J_1^2 - 6J_2} \quad (3.16)$$

4. Kwadratową macierz $[\varepsilon_{ij}]$ (3.8) można rozłożyć na dwie macierze kwadratowe, analogicznie do (2.56), w postaci:

$$T_\varepsilon = [\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{\gamma_{12}}{2} & \frac{\gamma_{13}}{2} \\ \frac{\gamma_{21}}{2} & \varepsilon_{22} & \frac{\gamma_{23}}{2} \\ \frac{\gamma_{31}}{2} & \frac{\gamma_{32}}{2} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon_m & \frac{\gamma_{12}}{2} & \frac{\gamma_{13}}{2} \\ \frac{\gamma_{21}}{2} & \varepsilon_{22} - \varepsilon_m & \frac{\gamma_{23}}{2} \\ \frac{\gamma_{31}}{2} & \frac{\gamma_{32}}{2} & \varepsilon_{33} - \varepsilon_m \end{bmatrix} = A_\varepsilon + D_\varepsilon \quad (3.17)$$

gdzie: A_ε – aksjator odkształceń,

D_ε – dewiator odkształceń.

Jak stąd widać stan odkształcenia może być rozłożony na odkształcenia objętościowe określone aksjatozem odkształceń A_ε i odkształcenia postaciowe określone dewiatorem odkształceń D_ε .

5. Niezmienniki aksjatora odkształceń A_ε :

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

- liniowy niezmiennik: $J_{1a} = 3\varepsilon_m = J_1 = 3\varepsilon_{oct}$ (3.19)

i proporcjonalny do niezmiennika $\Omega_1 = \varepsilon_{oct} = \varepsilon_m = J_{1a} / 3$ (3.20)

- kwadratowy niezmiennik: $J_{2a} = 3\varepsilon_m^2 = J_{1a}^2 / 3 = 3\varepsilon_{oct}^2 = J_1^2 / 3$ (3.21)

- sześcienne niezmiennik: $J_{3a} = \varepsilon_m^3 = J_1^3 = \varepsilon_{oct}^3$ (3.22)

Liniowy niezmiennik stanu odkształcenia J_1 (3.11) i liniowy niezmiennik aksjatora odkształceń J_{1a} (3.19) są równe jednostkowej zmianie objętości:

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_1^* + \varepsilon_2^* + \varepsilon_3^* = J_1 = J_{1a} \quad (3.23)$$

Ma to bardzo ważne znaczenie fizyczne. W przypadku $\varepsilon_1^* = \varepsilon_2^* = \varepsilon_3^*$ mamy do czynienia tylko z odkształceniem objętościowym.

6. Niezmienniki dewiatora odkształceń D_ε :

$$D_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon_m & \frac{\gamma_{12}}{2} & \frac{\gamma_{13}}{2} \\ \frac{\gamma_{21}}{2} & \varepsilon_{22} - \varepsilon_m & \frac{\gamma_{23}}{2} \\ \frac{\gamma_{31}}{2} & \frac{\gamma_{32}}{2} & \varepsilon_{33} - \varepsilon_m \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

- liniowy niezmiennik:

$$J_{1d} = (\varepsilon_{11} - \varepsilon_m) + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_m) + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_m) = \varepsilon_1^* + \varepsilon_2^* + \varepsilon_3^* = 0 \quad (3.25)$$

- kwadratowy niezmiennik:

$$\begin{aligned} J_{2d} &= -\frac{1}{6} \left[(\varepsilon_{11} - \varepsilon_m)^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_m)^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_m)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{12}^2 + \gamma_{23}^2 + \gamma_{31}^2) \right] = \\ &= -\frac{1}{6} \left[(\varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*)^2 + (\varepsilon_2^* - \varepsilon_3^*)^2 + (\varepsilon_3^* - \varepsilon_1^*)^2 \right] = -\frac{3}{2} \left(\frac{\gamma_{oct}}{2} \right)^2 = -3\varepsilon_m^2 + J_2 \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\text{lub po wprowadzeniu niezmiennika } \Omega_2 = \frac{\gamma_{oct}}{2} = \sqrt{-\frac{2}{3} J_{2d}} \quad (3.27)$$

- sześcienny niezmiennik $J_{3d} = J_3 + J_2 \varepsilon_m + 2\varepsilon_m^3 = J_3 - J_{2d} \varepsilon_m - \varepsilon_m^3$ (3.28)

W przypadku dewiatora odkształcenia mówimy tylko o przypadku odkształcenia postaciowego dla odkształceń głównych, ponieważ niezmiennik $J_{1d} = \varepsilon_1^* + \varepsilon_2^* + \varepsilon_3^* = 0$.

Niezmienniki stanu odkształcenia Ω_1 i Ω_2 noszą nazwę niezmienników Burzyńskiego, analogicznie do niezmienników stanu naprężenia (2.60) ω_1 i ω_2 .

3.3. Równania nierozdzielności odkształceń

Jeśli dane są składowe stanu deformacji, to równania kinematyczne (3.6) dają układ sześciu równań o pochodnych cząstkowych dla trzech niewiadomych składowych stanu przemieszczenia u_1, u_2, u_3 . Aby istniało jednoznaczne i ciągłe rozwiązanie układu, na składowe deformacji muszą być nałożone dodatkowe warunki. Równania te otrzymuje się przez rugowanie przemieszczeń z równań (3.6) za pomocą operacji różniczkowania i dodawania stronami z odpowiednimi

znakami. Warunki przedstawia układ sześciu niezależnych równań:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \gamma_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \gamma_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} \\
 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} \\
 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} \\
 \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2}
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Równania (3.29) są warunkami ciągłości przemieszczeń lub częściej nazywane są warunkami nierozdzielności odkształceń.

Schematy wyprowadzenia równań nierozdzielności odkształceń przedstawiono dla dwóch grup równań (3.29):

- grupa równań (3.29.a–c):

Z układu równań (3.6)

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad \varepsilon_{12} = \gamma_{12} / 2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \tag{3.30}$$

po kolejnych i odpowiednich operacjach różniczkowania:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \right) \end{cases} \tag{3.31}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right) \end{cases} \quad (3.32)$$

Bezpośrednio z zależności (3.32) widać, że:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (3.33)$$

- grupy równań (3.29.d–e):

Na podstawie układu równań (3.6) po zróźniczkowaniu mamy poniższe zależności:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} \end{cases} \quad (3.34)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \\ \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_3} \right) \end{cases} \quad (3.35)$$

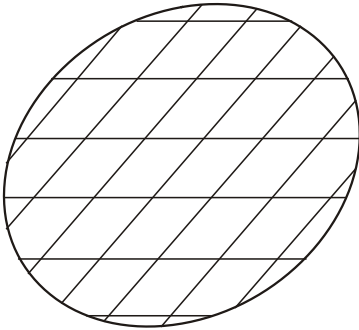
$$\begin{cases} \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \\ \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_3} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} \right) \end{cases} \quad (3.36)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_1^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_3} + \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right) \end{cases} \quad (3.37)$$

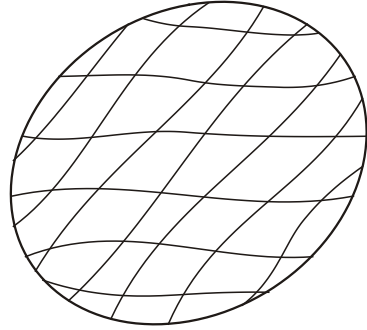
Z ostatnich zależności równań (3.34)–(3.37) otrzymano:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right) \quad (3.38)$$

Interpretację geometryczną równania nierozdzielności odkształceń można przedstawić następująco: składowe stanu odkształcenia muszą być od siebie w określony sposób zależne (układ równań (3.29)), aby każdy element ciała, przyległy do sąsiednich przed odkształceniem, przylegał także do tych samych sąsiednich elementów po odkształceniu ciała.



Przed odkształceniem



Po odkształceniu

Rys. 3.3. Interpretacja geometryczna równania nierozdzielności odkształceń

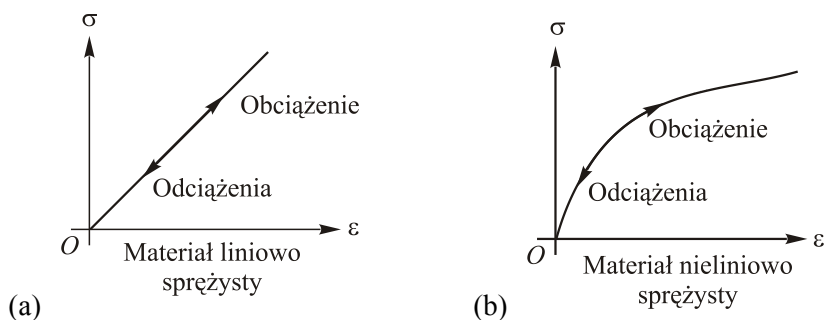
Przedstawione w tym rozdziale zależności nie zależą od składowych stanu naprężenia ani właściwości materiałowych. Zatem są słuszne bez względu na materiał ośrodka, który musi być tylko zgodnie z założeniami ciągły, a odkształcenia tego ośrodka można rozpatrywać jako nieskończenie małe.

4. UOGÓLNIONE PRAWO HOOKE'A CZYLI ZWIĄZKI FIZYCZNE POMIĘDZY NAPRĘŻENIAMI I ODKSZTAŁCENIAMI

Stan naprężenia (rozdział 2) i stan odkształcenia (rozdział 3) można rozpatrywać niezależnie od zachowania się różnych materiałów. Obecnie zajmujemy się ciałami, w których stan naprężenia zależy od aktualnego stanu odkształcenia.

Jeśli po usunięciu działającego na ciało obciążenia ciało to powraca do swojej konfiguracji początkowej (pierwotnej) to mówimy o sprężystym zachowaniu się ciała. Naprężenie nie zależy wówczas od historii odkształcenia i po odciążeniu w ciele nie ma naprężeń trwałych.

W mechanice ośrodków ciągłych bardzo ważne są związki fizyczne tzw. konstytutywne, które określają relacje pomiędzy naprężeniami i odkształceniami.



Rys. 4.1. Przykładowe zachowanie się materiałów sprężystych

Na rys. 4.1 pokazano zachowanie się materiałów sprężystych w przypadku jednokierunkowego rozciągania. Przy formułowaniu równań konstytutywnych wprowadza się pojęcie liniowości (rys. 4.1a) lub nieliniowości (rys. 4.1b) fizycznej ośrodku sprężystego.

Inżynierskie materiały konstrukcyjne mogą mieć w procesie obciążania właściwości izotropowe lub anizotropowe. Gdy właściwości mechaniczne, w tym termiczne materiału nie zależą od rozpatrywanego kierunku, mówimy o materiale izotropowym. Anizotropia materiału oznacza, że właściwości materiału zależą od rozpatrywanego kierunku.

Materiały konstrukcyjne możemy również rozpatrywać jako ośrodki jednorodne i niejednorodne. Jeżeli właściwości materiału nie zależą od punktu rozpatrywanego ośrodka np. w układzie kartezjańskim, to mówimy o materiale jednorodnym, zaś gdy funkcje określające właściwości mechaniczne zmieniają się w zależności od punktu ośrodka, to mówimy o materiale niejednorodnym.

W niniejszym skrypcie ograniczono się jedynie do przypadków stosowania prawa Hooke'a, czyli założono liniową zależność pomiędzy składowymi stanu naprężenia i składowymi stanu odkształcenia.

Związki konstytutywne w liniowej teorii sprężystości, czyli prawo Hooke'a, dla materiału anizotropowego, w zapisie macierzowym, mają postać:

$$\{\sigma_{ij}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3112} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix} = [C_{ijkl}] \{\epsilon_{kl}\} \quad (4.1)$$

gdzie C_{ijkl} są współczynnikami macierzy sprężystości nazywanymi też czasami elementami macierzy sztywności. Współczynniki sprężystości spełniają warunki symetrii względem par indeksów:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{jilk} = C_{klij} \quad (4.2)$$

Wówczas liczba niezależnych stałych sprężystych charakteryzujących zachowanie się materiału redukuje się z 81 do 21.

Relację odkształcenia i naprężenia, odwrotną do (4.1) można określić następująco:

$$\{\epsilon_{ij}\} = [C_{ijkl}]^{-1} \{\sigma_{kl}\} = [S_{ijkl}] \{\sigma_{kl}\} \quad (4.3)$$

gdzie: S_{ijkl} są współczynnikami macierzy podatności. Zgodnie z (4.2) i (4.3) słuszna jest też relacja symetrii:

$$S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{jilk} = S_{klij} \quad (4.4)$$

oraz

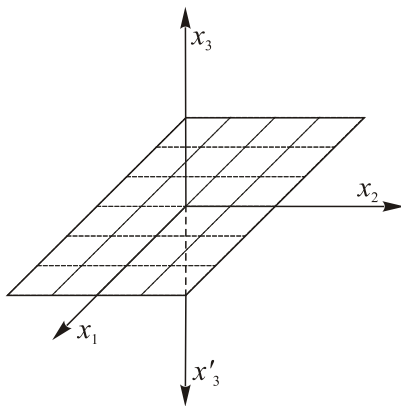
$$[S_{ijkl}] = [C_{ijkl}]^{-1} \quad (4.5)$$

W ogólnym przypadku dla ciała anizotropowego główne kierunki odkształceń nie pokrywają się z głównymi kierunkami naprężeń.

Materiał anizotropowy ma 36 nieznanymi współczynników C_{ijkl} lub S_{ijkl} , ale tylko 21 jest niezależnych. Doświadczalne wyznaczenie 21 niezależnych stałych materiałowych jest bardzo trudne w zastosowaniach inżynierskich. Redukcja niezależnych stałych współczynników można dokonać poprzez uproszczenie modelu ośrodka - zakładając symetrię materiału [1-5,10,15-19,24, 25,35, 37].

Najbardziej istotne są następujące symetrie materiału (w każdym jego punkcie) przy czym słuszne są zależności (4.2):

- Symetria monokliniczna – materiał ma jedną płaszczyznę symetrii (rys. 4.2). Dla ustalenia uwagi założono, że płaszczyzną symetrii jest płaszczyzna $x_1 - x_2$.



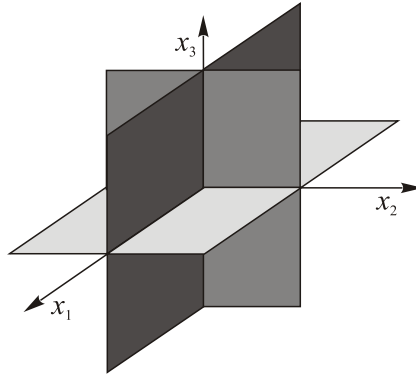
Rys. 4.2. Płaszczyzna $x_1 - x_2$ symetrii monoklinicznej

W tym przypadku liczba niezależnych elementów redukuje się do 13 ze względu na (4.2). Macierz sztywności w przypadku symetrii monoklinicznej ma postać:

$$[C_{ijkl}] = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & C_{1112} \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & C_{2212} \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & 0 & 0 & C_{3312} \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323} & C_{2331} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2331} & C_{3131} & 0 \\ C_{1112} & C_{2212} & C_{3312} & 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

- Materiał ortotropowy – zachowanie materiału ortotropowego jest scharakteryzowane przez trzy ortogonalne (prostopadłe) płaszczyzny symetrii właściwości sprężystych (rys. 4.3). W tym przypadku macierz sztywności można zapisać następująco:

$$[C_{ijkl}] = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{3131} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$



Rys. 4.3. Materiał ortotropowy

Materiał ortotropowy ma 9 niezależnych stałych materiałowych.

- Materiał poprzecznie izotropowy – w materiale takim jedna z płaszczyzn ortotropii jest płaszczyzną izotropii. Zakładając, że płaszczyzna $x_2 - x_3$ jest płaszczyzną izotropii, otrzymano 5 niezależnych składowych:

$$[C_{ijkl}] = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{2233} & C_{2222} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (C_{2222} - C_{2233}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

- Materiał izotropowy – właściwości materiału nie zależą od rozpatrywanego kierunku. W materiale izotropowym liczba niezależnych składowych redukuje się do 2, a macierz sztywności ma postać:

$$[C_{ijkl}] = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1111} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1122} & C_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (C_{1111} - C_{1122}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{1111} - C_{1122}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{1111} - C_{1122}) \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Współczynniki macierzy sztywności C_{ijkl} lub podatności S_{ijkl} mają na razie jedynie sens matematyczny, wiążąc składowe stanu naprężenia ze składowymi stanu odkształcenia. Sens fizyczny uwidacznia się po wprowadzeniu stałych inżynierskich tzn. modułów Younga E_i , modułów sprężystości postaciowej (modułów Kirchhoffa) G_{ij} , liczb (współczynników) Poissona ν_{ij} , gdzie indeks i oznacza kierunek rozciągania, zaś indeks j kierunek odkształceń poprzecznych.

W tablicach 4.1 – 4.3 dla trzech ostatnich najczęściej stosowanych modeli ciała zestawiono macierze sztywności (4.5) $[C_{ijkl}]$ i podatności (4.7) $[S_{ijkl}]$:

$$\{\sigma_{ij}\} = [C_{ijkl}] \{\varepsilon_{kl}\} \quad \{\varepsilon_{ij}\} = [S_{ijkl}] \{\sigma_{kl}\} \quad (4.10)$$

Tablica 4.1. Zależności pomiędzy współczynnikami C_{ijkl} i S_{ijkl} , a stałymi inżynierskimi dla materiału ortotropowego

Material ortotropowy

$$[C_{ijkl}] = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{3131} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix}$$

$$\Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - 2\nu_{12}\nu_{13}\nu_{32}$$

gdzie: $C_{1111} = \frac{(1 - \nu_{23}\nu_{32})E_1}{\Delta}$

$C_{1133} = \frac{(\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23})E_3}{\Delta}$

$C_{2233} = \frac{(\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13})E_3}{\Delta}$

$C_{2323} = 2G_{23}$

$C_{1212} = 2G_{12}$

$C_{1122} = \frac{(\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32})E_2}{\Delta}$

$C_{2222} = \frac{(1 - \nu_{31}\nu_{13})E_2}{\Delta}$

$C_{3333} = \frac{(1 - \nu_{12}\nu_{21})E_3}{\Delta}$

$C_{3131} = 2G_{13}$

a ponadto: $\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \qquad \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3} \qquad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}$

$$[S_{ijkl}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_3} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} \end{bmatrix}$$

Tablica 4.2. Zależności pomiędzy współczynnikami C_{ijkl} i S_{ijkl} , a stałymi inżynierskimi dla materiału poprzecznie izotropowego

Materiał poprzecznie izotropowy z płaszczyzną x_2 - x_3 izotropii					
$[C_{ijkl}] = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{2233} & C_{2222} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (C_{2222} - C_{2233}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix}$					
<p>gdzie: $C_{1111} = \frac{(1 - \nu_{23}^2)E_1}{\Delta_1}$ $C_{1122} = \frac{(\nu_{21} + \nu_{23}^2)E_2}{\Delta_1}$</p> <p>$C_{2222} = \frac{(1 - \nu_{12}\nu_{21})E_2}{\Delta_1}$ $C_{2233} = \frac{(\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{12})E_2}{\Delta_1}$</p> <p>$(C_{2222} - C_{2233}) = \frac{(1 - \nu_{23} - 2\nu_{21}\nu_{12})E_2}{\Delta_1} = 2G_{23}$ $C_{1212} = G_{12}$</p> <p style="text-align: center;">$\Delta_1 = (1 + \nu_{23})(1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{21})$</p> <p>a ponadto: $E_2 = E_3$ $\nu_{12} = \nu_{13}$ $G_{12} = G_{13}$ $G_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})}$</p> <p style="text-align: center;">$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}$ $\frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}$ $\frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}$</p>					
$[S_{ijkl}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1 + \nu_{23})}{E_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} \end{bmatrix}$					

Tablica 4.3. Zależności pomiędzy współczynnikami C_{ijkl} i S_{ijkl} , a stałymi inżynierskimi dla materiału izotropowego

Materiał izotropowy					
$[C_{ijkl}] = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1111} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1122} & C_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (C_{1111} - C_{1122}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{1111} - C_{1122}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{1111} - C_{1122}) \end{bmatrix}$					
<p>gdzie: $C_{1111} = \frac{(1-\nu)E}{\Delta_2}$ $C_{1122} = \frac{\nu E}{\Delta_2}$</p> <p>$C_{1111} - C_{1122} = 2G = \frac{E}{(1+\nu)}$ $\Delta_2 = (1+\nu)(1-2\nu)$</p> <p>a ponadto: $E_1 = E_2 = E_3 = E$ $\nu_{12} = \nu_{21} = \nu_{13} = \nu_{31} = \nu_{23} = \nu_{32} = \nu$</p> <p>$G_{12} = G_{13} = G_{23} = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$</p>					
$[S_{ijkl}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1+\nu)}{E} \end{bmatrix}$					

Przykład 4.1

Kostkę sześcienną o boku a włożono bez luzu i wcisku do nieodkształcalnego koryta (rys. 4.4) i poprzez nieodkształcalną płytę obciążono siłą ściskającą P . Kostka wykonana jest z materiału ortotropowego, którego główne kierunki ortotropii pokrywają się z krawędziami sześcianu. Wyznaczyć nacisk wywierany przez kostkę na ścianki boczne koryta oraz względną zmianę objętości. Dane: $E_1, E_2, E_3, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$.

Rozwiązanie

Kostka nie może rozszerzać się w kierunku x_1 , a więc $\varepsilon_{11}=0$. W kierunku x_2 , nie działają żadne naprężenia, czyli $\sigma_{22}=0$. Naciski na kostkę w kierunku x_3 wynoszą: $\sigma_{33} = -P/a^2$, bo P jest siłą ściskającą. W analizowanym przypadku nie występują naprężenia styczne, czyli $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ i $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$. Z zależności (4.10b) i Tablicy 4.1 wynika:

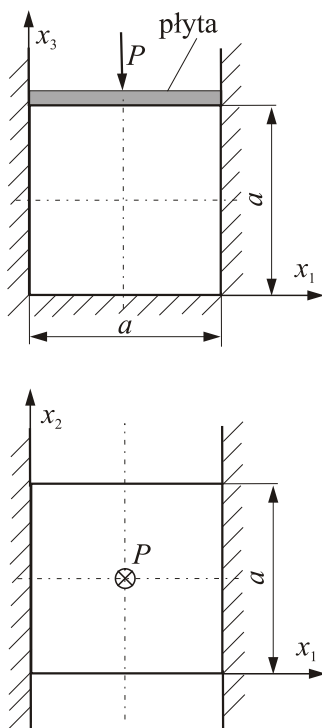
$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\sigma_{11}}{E_1} - \nu_{12} \frac{\sigma_{22}}{E_1} - \nu_{13} \frac{\sigma_{33}}{E_1} & \varepsilon_{22} &= \frac{\sigma_{22}}{E_2} - \nu_{21} \frac{\sigma_{11}}{E_2} - \nu_{23} \frac{\sigma_{33}}{E_2} \\ \varepsilon_{33} &= \frac{\sigma_{33}}{E_3} - \nu_{31} \frac{\sigma_{11}}{E_3} - \nu_{32} \frac{\sigma_{22}}{E_3} \end{aligned} \quad (4.11)$$

oraz

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3} \quad \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3} \quad (4.12)$$

Z warunków zadania i (4.11) wynika, że

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\sigma_{11}}{E_1} - \nu_{13} \frac{\sigma_{33}}{E_1} = 0 \\ \varepsilon_{22} &= -\nu_{21} \frac{\sigma_{11}}{E_2} - \nu_{23} \frac{\sigma_{33}}{E_2} = -\nu_{21} \frac{\sigma_{11}}{E_2} + \nu_{23} \frac{P}{E_2 a^2} \\ \varepsilon_{33} &= -\frac{P}{E_3 a^2} - \nu_{31} \frac{\sigma_{11}}{E_3} \end{aligned} \quad (4.13)$$



Rys. 4.4. Schemat do przykładu 4.1

Po uwzględnieniu w (4.13) związku (4.12) otrzymano:

$$\sigma_{11} = \nu_{13}\sigma_{33} = -\nu_{13} \frac{P}{a^2}$$

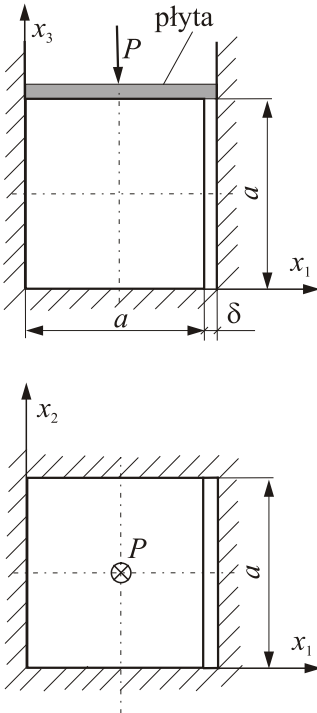
$$\varepsilon_{22} = \frac{P}{E_2 a^2} (\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}) \quad (4.14)$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{P}{E_3 a^2} (1 - \nu_{13}\nu_{31})$$

Nacisk wywierany przez kostkę na ścianki boczne korytka wynosi

$$\sigma_{11} = -\nu_{13} \frac{P}{a^2}, \text{ zaś względną zmianę objętości wyznaczamy z (3.23):}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_1^* + \varepsilon_2^* + \varepsilon_3^* = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \frac{P}{a^2} \left(\frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{31}}{E_2} - \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_3} \right) \quad (4.15)$$



Rys. 4.5. Schemat do przykładu 4.2

Przykład 4.2

Kostkę sześcienną o boku a włożono do nieodkształcalnego naczynia bez luzu i wcisku w kierunku osi x_2 , a w kierunku x_1 z luzem δ , przy czym $\delta \ll a$. Obliczyć minimalną wartość siły P , przy której luz δ zostanie zlikwidowany. Kostka jest wykonana z materiału ortotropowego, którego główne kierunki ortotropii pokrywają się z krawędziami kostki. Dane: $E_1, E_2, E_3, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$.

Rozwiązanie

Odształcenie względne w kierunku x_1 wynosi $\varepsilon_{11} = \delta/a$, zaś w kierunku x_2 , nie może rozszerzać się czyli $\varepsilon_{22} = 0$. Ponieważ poszukujemy minimalnej wartości siły P , dla której luz δ zniknie, to naprężenia w tym kierunku będą równe zero - $\sigma_{11} = 0$, zaś siła P wywołuje naprężenia $\sigma_{33} = -P/a^2$.

$$\frac{\delta}{a} = 0 - \nu_{12} \frac{\sigma_{22}}{E_1} + \nu_{13} \frac{P}{E_1 a^2}$$

$$0 = \frac{\sigma_{22}}{E_2} + \nu_{23} \frac{P}{E_2 a^2} \quad (4.16)$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{P}{E_3 a^2} - \nu_{32} \frac{\sigma_{22}}{E_3}$$

Z (4.16) i (4.12) wynika, że

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= -\nu_{23} \frac{P}{a^2} \\ \varepsilon_{33} &= -\frac{P}{E_3 a^2} (1 - \nu_{23} \nu_{32}) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Minimalna wartość siły P , dla której zostanie zlikwidowany luz δ wynosi:

$$P = \frac{E_1 a \delta}{\nu_{13} + \nu_{12} \nu_{23}} \quad (4.18)$$

5. WYBRANE HIPOTEZY WYTRZYMAŁOŚCIOWE

Podstawowym i nieodzownym warunkiem pracy każdej konstrukcji inżynierskiej jest zapewnienie jej dostatecznej wytrzymałości, sztywności, stateczności, bezpieczeństwa i niezawodności. Najpewniejszym sposobem na to jest przeprowadzenie badań doświadczalnych. Poszukiwanie w każdym przypadku najkorzystniejszego pod względem wytrzymałościowym rozwiązania na drodze pracochłonnych i kosztownych badań eksperymentalnych, może nie dać jednak pożądanego efektu.

W praktyce inżynierskiej potrzeba gotowych wzorów obliczeniowych, na podstawie których można ocenić bezpieczeństwo projektowanego elementu lub konstrukcji. Dla rozpatrywanych prostych przypadków obciążeń takich jak rozciąganie, ścinanie, skręcanie i zginanie wydaje się możliwe przeprowadzenie badań doświadczalnych dla każdego z tych przypadków obciążenia i wyznaczenia dla nich naprężeń obliczeniowych lub dopuszczalnych. W konstrukcjach rzeczywistych wykonanych z różnych materiałów występują nie tylko proste przypadki, lecz przeważa złożony stan naprężenia charakteryzujący się przestrzennym układem naprężeń głównych (2.39) $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*$ i ich wzajemnymi relacjami.

Z tych względów rezygnuje się z bezpośredniej oceny wytrzymałości i bazuje na ocenę pośredniej - porównawczej. Polega to na przyjęciu za miarę wytrzymałości materiału pewnej wielkości fizycznej. Podstawą doboru takiej wielkości są zebrane doświadczenia, rzetelne i wnikliwe obserwacje, obszerna baza danych.

W dalszych rozważaniach założono następujące relacje pomiędzy naprężeniami głównymi (2.39): $\sigma_1^* \geq \sigma_2^* \geq \sigma_3^*$.

Zredukowanie złożonego stanu naprężenia do prostego rozciągania (bądź ściskania) upraszcza obliczenia wytrzymałościowe. W przypadkach jednoosiowego rozciągania wielkością taką jest naprężenie główne σ_1^* (tzn. $\sigma_1^* > 0$, $\sigma_2^* = \sigma_3^* = 0$), które wywołuje takie same wyężenie materiału jak dany złożony stan naprężenia. Naprężenia σ_{red} nazywamy naprężeniami zredukowanymi lub zastępczymi, gdzie wprowadza się oznaczenie

$$\sigma_{red} = \sigma_1^* \quad (5.1)$$

Określenie wielkości fizycznej jako miary wytrzymałości (lub tzw. wyężenia) materiału nazywamy hipotezą wytrzymałościową.

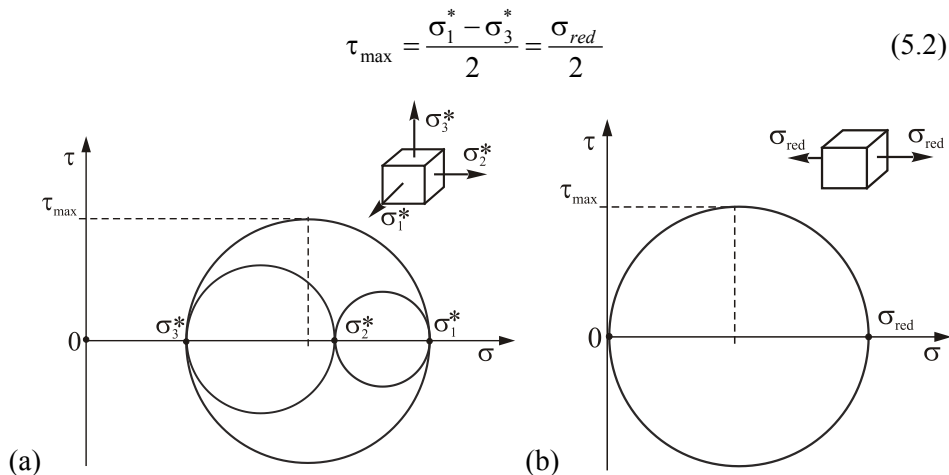
W rozważaniach omówiono najczęściej stosowane hipotezy, które mają istotne znaczenie w praktyce inżynierskiej. W wieloletniej praktyce inżynierskiej powszechnie stosowane są stopy metali, w tym głównie stale, dla których dysponujemy bardzo bogatymi wynikami badań doświadczalnych. Materiały te modeluje się jako materiały izotropowe mające jednakową wytrzymałość na rozciąganie i ściskanie. W przypadku materiałów sprężysto-plastycznych, mających zdolność do odkształceń trwałych jako maksymalne naprężenie zredukowane (tzw. graniczne) przyjmuje się zwykle granicę plastyczności R_e lub umowną granicę plastyczności R_{02} , zaś dla materiałów sprężysto-kruchych najczęściej wytrzymałość na rozciąganie R_m . Szeroki przegląd hipotez wytrzymałościowych przedstawiono w pracach [36,39].

5.1. Przykładowe hipotezy wytrzymałościowe dla materiałów izotropowych

5.1.1. Hipoteza największego naprężenia stycznego (τ_{\max})

Według hipotezy największego naprężenia stycznego miarą wytrzymałości materiału jest maksymalne naprężenie styczne czyli tnące. Hipoteza ta bardzo dobrze opisuje wytrzymałość materiałów sprężysto-plastycznych. Do wprowadzenia tej hipotezy przyczynili się: Coulomb (1776), Tresca (1872) i Guest (1900).

W myśl tej hipotezy porównuje się maksymalne naprężenia styczne dla złożonego stanu naprężenia i jednokierunkowego rozciągania (rys. 5.1)



Rys. 5.1. Maksymalne naprężenia styczne według hipotezy największego naprężenia stycznego

Stąd naprężenie zredukowane dla hipotezy τ_{\max} ma postać:

$$\sigma_{red} = |\sigma_1^* - \sigma_3^*| = |\sigma_{\max} - \sigma_{\min}|, \quad \text{gdzie } \sigma_1^* \geq \sigma_2^* \geq \sigma_3^* \quad (5.3)$$

W hipotezie tej przyjmuje się, że wytrzymałość na rozciąganie i ściskanie jest jednakowa.

Trudność w stosowaniu tej hipotezy uwidacznia się szczególnie, gdy dany stan naprężenia określony jest przez wszystkie sześć niezależnych składowych stanu naprężenia σ_{ij} , ponieważ wówczas należy wyznaczyć naprężenia główne

$\sigma_1^* \geq \sigma_2^* \geq \sigma_3^*$, które umożliwiają wykorzystanie w sposób jawny tę hipotezę (tzn. zależności (5.3)).

5.1.2. Hipoteza Mohra

W przypadku materiału izotropowego mającego różną wytrzymałość na rozciąganie i ściskanie Mohr zaproponował modyfikację hipotezy τ_{\max} w postaci ogólnej:

$$\sigma_{red} = \left| \sigma_1^* - \frac{1}{z} \sigma_3^* \right| = \left| \sigma_{\max} - \frac{1}{z} \sigma_{\min} \right| \quad (5.4)$$

gdzie stosunek wytrzymałości na ściskanie i rozciąganie:

$$z = \frac{R_c}{R_m} \quad (5.5)$$

W przypadku, gdy wytrzymałość na rozciąganie R_m i ściskanie R_c są jednakowe, tzn. $z = 1$, hipoteza ta jest tożsama z hipotezą τ_{\max} .

5.1.3. Hipoteza Hubera

Miarą wytrzymałości materiału według hipotezy zaproponowanej przez polskiego profesora Maksymiliana Tytusa Hubera (1904) jest energia odkształcenia postaciowego. Warunek wytrzymałościowy wg hipotezy Hubera ma postać:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1^* - \sigma_2^*)^2 + (\sigma_2^* - \sigma_3^*)^2 + (\sigma_3^* - \sigma_1^*)^2]} = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{oct} = \frac{3}{\sqrt{2}} \omega_2 = -\sqrt{3} I_d \quad (5.6)$$

lub postać:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)]} \quad (5.7)$$

Znaczący wkład w rozwój tej hipotezy wnieśli także Mises (1913) i Hencky (1925). Przyjmując inne założenia otrzymali identyczną postać końcową wzorów. Stąd od pierwszych liter nazwisk głównych jej autorów hipoteza ta często też nazywana jest hipotezą HMM.

Wzór (5.7) znacznie ułatwia obliczenia wytrzymałościowe w porównaniu z hipotezą τ_{\max} , bo nie wymaga wyznaczenia naprężeń głównych i ich jawnego uporządkowania.

5.1.4. Hipoteza Burzyńskiego

Współpracownik prof. M.T. Hubera, prof. Włodzimierz Burzyński rozszerzył stosowanie hipotezy Hubera na przypadek materiałów izotropowych mających różne wytrzymałości na rozciąganie R_m i ściskanie R_c . W uproszczonej wersji hipotezy Burzyńskiego naprężenia zredukowane wyrażają się wzorem [26]:

$$\sigma_{red} = \frac{z-1}{2z}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) + \frac{z+1}{2z} \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)]}$$

(5.8)

gdzie: z wyraża się wzorem (5.5). W przypadku gdy $z=1$ wzór (5.8) jest identyczny ze wzorem (5.7) wynikającym z hipotezy Hubera.

5.2. Hipotezy wytrzymałościowe dla materiałów anizotropowych i ortotropowych

W przypadku materiałów anizotropowych i ortotropowych nie można korzystać z hipotez dla materiałów izotropowych, w tym z hipotezy maksymalnych naprężeń tnących lub hipotezy Hubera-Misesa-Hencky'ego.

W większości zastosowań inżynierskich materiał anizotropowy lub monokliniczny (patrz rozdział 4), o ile to możliwe ze względu na dokładność zamodelowania, modeluje się jako materiał ortotropowy. Kryteria zniszczenia materiałów anizotropowych lub ortotropowych mogą charakteryzować początek pojawienia się procesu zniszczenia, na przykład poprzez osiągnięcie wyrażnej lub umownej granicy plastyczności, czy też naprężenia zredukowane lub niszczące (graniczne) poprzedzający pełne zniszczenie struktury. Te względy umożliwiają praktycznie szeroką interpretację kryteriów zniszczenia. Kryteria zniszczenia określają tylko, na podstawie przyjętej wielkości fizycznej, dla jakiego stanu naprężenia lub odkształcenia materiału ulega zniszczeniu, a nie opisują wyężenia materiału w całym procesie obciążenia odniesionego np. do jednoosiowego

rozciągania. Ograniczono się zatem jedynie do przedstawienia podstawowych hipotez wytrzymałościowych dla materiałów ortotropowych.

Dla materiałów anizotropowych bardzo często stosowane są najprostsze hipotezy wytrzymałościowe: *hipoteza maksymalnych naprężeń*, *hipoteza maksymalnych odkształceń*.

Hipotezy te nie uwzględniają jednak wzajemnego oddziaływania, czyli tzw. interakcji, pomiędzy naprężeniami niszczącymi strukturę i odpowiadającymi im formami zniszczenia.

Punktem wyjścia do hipotez interakcyjnych dla materiałów nieizotropowych było proste kryterium zniszczenia zaproponowane przez Hilla przy trójkierunkowym stanie naprężenia dla materiałów ortotropowych traktowanych jako jednorodnych. *Kryterium Hilla* [11-13] ma postać:

$$F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{13}^2 + 2N\sigma_{12}^2 = 1 \quad (5.9)$$

gdzie: F, G, H, L, M, N są współczynnikami, które należy wyznaczyć na podstawie badań doświadczalnych. Bardziej szczegółowego omówienia kryterium Hilla dokonano dla płaskiego stanu naprężenia (rozdział 6).

Hipoteza ta jest rozszerzeniem hipotezy Hubera-Misesa-Hencky'ego (HMH) na materiały ortotropowe mające w tych samych kierunkach takie same wytrzymałości na rozciąganie i ściskanie. Należy podkreślić, że dla dowolnego obciążenia konstrukcji główne naprężenia nie pokrywają się z głównymi kierunkami ortotropii materiałowej.

W praktyce inżynierskiej te trzy kryteria są najczęściej rozpowszechnione ze względu na prostotę, co widać w odpowiednich przepisach normatywnych.

5.2.1. Hipoteza maksymalnych naprężeń

W hipotezie maksymalnych naprężeń o wyężeniu materiału decydują naprężenia w kierunkach głównych ortotropii materiału muszą być mniejsze od odpowiednich wytrzymałości. W hipotezie tej można uwzględnić różne wytrzymałości na rozciąganie i ściskanie. Materiał ulega zniszczeniu w przypadku przekroczenia chociażby jednego z warunków:

$$\begin{aligned} -C_1 &\leq \sigma_{11} \leq T_1 \\ -C_2 &\leq \sigma_{22} \leq T_2 \\ -C_3 &\leq \sigma_{33} \leq T_3 \\ -S_{23} &\leq \sigma_{23} \leq S_{23} \\ -S_{13} &\leq \sigma_{13} \leq S_{13} \\ -S_{12} &\leq \sigma_{12} \leq S_{12} \end{aligned} \quad (5.10)$$

gdzie: $C_1, T_1, C_2, T_2, C_3, T_3$ - wytrzymałość na ściskanie i rozciąganie, odpowiednio, w głównych kierunkach ortotropii materiałowych 1, 2, 3, zaś S_{12}, S_{23}, S_{13} - wytrzymałość na ścinanie, odpowiednio, w płaszczyźnie 1-2, 2-3, 1-3.

5.2.2. Hipoteza maksymalnych odkształceń

Hipoteza maksymalnych odkształceń jest podobna do hipotezy maksymalnych naprężeń. O zniszczeniu materiału zamiast maksymalnych naprężeń decydują maksymalne odkształcenia. Odkształcenia względne w głównych kierunkach ortotropii materiału muszą spełniać następujące warunki:

$$\begin{aligned}
 C_{\varepsilon 1} &\leq \varepsilon_{11} \leq T_{\varepsilon 1} \\
 C_{\varepsilon 2} &\leq \varepsilon_{22} \leq T_{\varepsilon 2} \\
 C_{\varepsilon 3} &\leq \varepsilon_{33} \leq T_{\varepsilon 3} \\
 S_{\varepsilon 23} &\leq 2\varepsilon_{23} = \gamma_{23} \leq S_{\varepsilon 23} \\
 S_{\varepsilon 13} &\leq 2\varepsilon_{13} = \gamma_{13} \leq S_{\varepsilon 13} \\
 S_{\varepsilon 12} &\leq 2\varepsilon_{12} = \gamma_{12} \leq S_{\varepsilon 12}
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

gdzie: $C_{\varepsilon 1}, T_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}, T_{\varepsilon 2}, C_{\varepsilon 3}, T_{\varepsilon 3}$ - dopuszczalne odkształcenia względne na ściskanie i rozciąganie, odpowiednio w głównych kierunkach ortotropii materiałowej 1, 2, 3, zaś $S_{\varepsilon 12}, S_{\varepsilon 23}, S_{\varepsilon 13}$ dopuszczalny kąt odkształcenia postaciowego, odpowiednio, w płaszczyźnie 1-2, 2-3, 1-3.

Jeśli materiał do założonego stanu zniszczenia zachowuje się liniowo sprężyste, to słuszne są następujące związki:

$$\begin{aligned}
 C_{\varepsilon 1} &= \frac{C_1}{E_1} & T_{\varepsilon 1} &= \frac{T_1}{E_1} \\
 C_{\varepsilon 2} &= \frac{C_2}{E_2} & T_{\varepsilon 2} &= \frac{T_2}{E_2} \\
 C_{\varepsilon 3} &= \frac{C_3}{E_3} & T_{\varepsilon 3} &= \frac{T_3}{E_3}
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

$$S_{\varepsilon 12} = \frac{S_{12}}{G_{12}} \quad S_{\varepsilon 23} = \frac{S_{23}}{G_{23}} \quad S_{\varepsilon 13} = \frac{S_{13}}{G_{13}}$$

Porównując związki (5.10) dla hipotezy maksymalnych naprężeń ze związkami (5.11) i (5.12) dla hipotezy maksymalnych odkształceń na podstawie zależności (4.10) i Tabeli 4.1 łatwo zauważyć, że te ostatnie różnią się jedynie występowaniem członów zawierających liczby Poissona.

6. PŁASKIE ZAGADNIENIA W WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW

W większości stosowanych konstrukcji inżynierskich elementy konstrukcyjne są modelowane poprzez zredukowanie trójkierunkowego stanu naprężenia i/lub odkształcenia do dwuwymiarowego stanu naprężenia (tzn. płaskiego stanu naprężenia) lub odkształcenia (tzn. płaskiego stanu odkształcenia). Zatem w zagadnieniach inżynierskich mają szerokie zastosowanie zadania dla płaskiego stanu odkształcenia oraz dla płaskiego stanu naprężenia.

W wytrzymałości materiałów dla prętów, belek, wałów przyjmuje się nawet jednokierunkowy stan naprężenia odpowiednio w przypadkach prostego rozciągania/ściskania, zginania, a także np. dla cienkościennych pierścieni. Zaś dwukierunkowy stan naprężenia zakłada się dla np. belek poddanych zginaniu i skręcaniu, cienkościennych zbiorników, płyt i powłok, rur.

6.1. Płaski stan odkształcenia

W przypadku ciała, w którym przemieszczenia osiowe w kierunku x_3 są równe zero, tzn. $u_3 = 0$, to mówimy o przypadku płaskiego stanu odkształcenia w płaszczyźnie $x_1 - x_2$. Przemieszczenia są wówczas tylko funkcjami współrzędnych x_1, x_2 , tzn.

$$u_1 = u_1(x_1, x_2) \quad u_2 = u_2(x_1, x_2) \quad u_3 = 0 \quad (6.1)$$

Z powyższych zależności geometrycznych i ze związków geometrycznych (3.6) wynika, że

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \varepsilon_{11}(x_1, x_2) & \varepsilon_{22} &= \varepsilon_{22}(x_1, x_2) \\ \varepsilon_{12} &= \varepsilon_{12}(x_1, x_2) & \varepsilon_{33} &= \varepsilon_{23} = \varepsilon_{13} = 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Dla płaskiego stanu odkształcenia, czyli deformacji zachodzącej tylko w płaszczyznach równoległych do płaszczyzny $(x_1 - x_2)$ sześć równań nierozdzielności odkształceń (3.29) redukuje się do jednego równania:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (6.3)$$

Prawo Hooke'a dla materiału ortotropowego ma postać:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{3131} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} = 0 \\ \varepsilon_{23} = 0 \\ \varepsilon_{13} = 0 \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (6.4)$$

skąd bezpośrednio wynika, że

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= C_{1111}\varepsilon_{11} + C_{1122}\varepsilon_{22} & \sigma_{22} &= C_{1122}\varepsilon_{11} + C_{2222}\varepsilon_{22} & \sigma_{12} &= C_{1212}\varepsilon_{12} \\ \sigma_{33} &= C_{1133}\varepsilon_{11} + C_{2233}\varepsilon_{22} & \sigma_{23} &= \sigma_{13} = 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Z zależności (6.2) i (6.5) wynika, że $\sigma_{33} = \sigma_{33}(x_1, x_2)$ i wówczas warunki równowagi wewnętrznej (2.23) upraszczają się do postaci:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + X_1 = 0 \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + X_2 = 0 \quad (6.6)$$

6.2. Płaski stan naprężenia

Dla płaskiego stanu naprężenia w płaszczyźnie $x_1 - x_2$ składowe stanu naprężenia wyrażają się zależnościami:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{11}(x_1, x_2) & \sigma_{22} &= \sigma_{22}(x_1, x_2) \\ \sigma_{12} &= \sigma_{12}(x_1, x_2) & \sigma_{33} &= \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0 \end{aligned} \quad (6.7)$$

Prawo Hooke'a dla materiału ortotropowego w płaskim stanie naprężenia można, zgodnie z (6.7), zapisać:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} = 0 \\ \sigma_{23} = 0 \\ \sigma_{13} = 0 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{3131} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (6.8)$$

Z powyższego wynika, że:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= C_{1111}\varepsilon_{11} + C_{1122}\varepsilon_{22} + C_{1133}\varepsilon_{33} \\
 \sigma_{22} &= C_{1122}\varepsilon_{11} + C_{2222}\varepsilon_{22} + C_{2233}\varepsilon_{33} \\
 \sigma_{12} &= C_{1212}\varepsilon_{12} \\
 \varepsilon_{33} &= -(C_{1133}\varepsilon_{11} + C_{2233}\varepsilon_{22})/C_{3333} \\
 \varepsilon_{23} &= \varepsilon_{13} = 0
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

Równania równowagi wewnętrznej (2.23) mają postać:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + X_1 &= 0 \\
 \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + X_2 &= 0
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

czyli postać identyczną jak dla płaskiego stanu odkształcenia (6.6).

6.3. Reguły transformacyjne

W celu uproszczenia zapisu zależności prezentowanych w rozdziałach od 2 do 6.2 wprowadzono jednoindeksowe oznaczenia dla składowych stanu naprężenia i odkształcenia oraz dwuindeksowe dla współczynników sprężystości [1-5,15-19,27,37]. Przyjęto następujące reguły notacyjne:

- jednoindeksowa notacja:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \sigma_{11} \\ \sigma_2 = \sigma_{22} \\ \sigma_3 = \sigma_{33} \\ \sigma_4 = \sigma_{23} \\ \sigma_5 = \sigma_{13} \\ \sigma_6 = \sigma_{12} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_3 = \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_4 = 2\varepsilon_{23} = \gamma_{23} \\ \varepsilon_5 = 2\varepsilon_{13} = \gamma_{13} \\ \varepsilon_6 = 2\varepsilon_{12} = \gamma_{12} \end{array} \right\} \tag{6.11}$$

- dwuindeksowe notacje:

	C_{ijkl}		C_{pq}
ij	11, 22, 33, 23, 31, 12	p	1, 2, 3, 4, 5, 6
kl	11, 22, 33, 23, 31, 12	q	1, 2, 3, 4, 5, 6

(6.12)

Wprowadzając reguły transformacyjne (6.11) i (6.12) do równania (4.1) możemy prawo Hooke'a zapisać w postaci:

$$\{\sigma_i\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = [C_{ij}] \{\varepsilon_j\} \quad (6.13)$$

gdzie słuszny jest warunek symetrii współczynników macierzy:

$$C_{ij} = C_{ji} \quad (6.14)$$

Ze względu na wprowadzenie innej od (3.8) jednoindeksowej notacji (6.11), w której:

$$\varepsilon_4 = 2\varepsilon_{23} = \gamma_{23} \quad \varepsilon_5 = 2\varepsilon_{13} = \gamma_{13} \quad \varepsilon_6 = 2\varepsilon_{12} = \gamma_{12} \quad (6.15)$$

to tylko niektóre współczynniki macierzy (6.13) C_{ij} dla $i, j = 1, 2, 6$ w porównaniu z czteroindeksowymi współczynnikami macierzy C_{ijkl} (4.1) wyrażają się zależnościami:

$$\begin{aligned} C_{44} &= C_{2323} / 2 & C_{55} &= C_{3131} / 2 & C_{66} &= C_{1212} / 2 \\ C_{45} &= C_{2331} / 2 & C_{46} &= C_{2312} / 2 & C_{56} &= C_{3112} / 2 \end{aligned} \quad (6.16)$$

Dla pozostałych przypadków nie podanych w (6.16) współczynniki macierzy sztywności są identyczne z (4.1).

Relację odkształcenia i naprężenia, odwrotną do (6.13), można określić następująco:

$$\{\varepsilon_j\} = [C_{ij}]^{-1} \{\sigma_i\} = [S_{ij}] \{\sigma_i\} \quad (6.17)$$

gdzie: S_{ij} są współczynnikami macierzy podatności. Zgodnie z (6.14) i (6.17) słuszna jest też relacja symetrii:

$$S_{ij} = S_{ji} \quad (6.18)$$

oraz zależność

$$[S_{ij}] = [C_{ij}]^{-1} \quad (6.19)$$

Uwzględniając reguły transformacyjne (6.11) i (6.12) macierz sztywności C_{ij} dla różnych rodzajów materiałów (patrz rozdział 4) można zapisać w następującej postaci:

- Materiał ortotropowy

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

- Materiał poprzecznie izotropowy, gdy płaszczyzną izotropii jest płaszczyzna $x_2 - x_3$

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (C_{22} - C_{23})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

- Materiał izotropowy

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

6.4. Prawo Hooke'a, czyli równania fizyczne dla materiału dwuwymiarowego

W przypadku ciała ortotropowego dla płaskiego stanu naprężenia w płaszczyźnie $x_1 - x_2$ bardzo często oprócz wprowadzenia reguł transformacyjnych (6.11) i (6.12) uwzględnia się dodatkowo zapis, że:

$$\tau_{12} \equiv \sigma_6 \quad \text{oraz} \quad \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} = \varepsilon_6 \quad (6.23)$$

W tym przypadku uogólnione prawo Hooke'a redukuje się do postaci:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= S_{11}\sigma_1 + S_{12}\sigma_2 + S_{16}\tau_{12} \\
\varepsilon_2 &= S_{21}\sigma_1 + S_{22}\sigma_2 + S_{26}\tau_{12} \\
\gamma_{12} &= S_{61}\sigma_1 + S_{62}\sigma_2 + S_{66}\tau_{12}
\end{aligned} \tag{6.24}$$

z dodatkowym warunkiem:

$$\varepsilon_3 = S_{13}\sigma_1 + S_{23}\sigma_2 + S_{36}\tau_{12} \tag{6.25}$$

bądź w postaci odwrotnej do (6.24):

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{16}\gamma_{12} + C_{13}\varepsilon_3 \\
\sigma_2 &= C_{21}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + C_{26}\gamma_{12} + C_{23}\varepsilon_3 \\
\tau_{12} &= C_{16}\varepsilon_1 + C_{26}\varepsilon_2 + C_{66}\gamma_{12} + C_{36}\varepsilon_3
\end{aligned} \tag{6.26}$$

z dodatkowym warunkiem:

$$\sigma_3 = C_{31}\varepsilon_1 + C_{32}\varepsilon_2 + C_{36}\varepsilon_3 + C_{36}\gamma_{12} = 0 \tag{6.27}$$

Wyznaczając z zależności (6.27) składową odkształcenia ε_3 i po wstawieniu do (6.26) otrzymano:

$$\varepsilon_3 = -\frac{1}{C_{33}}(C_{13}\varepsilon_1 + C_{23}\varepsilon_2 + C_{36}\gamma_{12}) \tag{6.28}$$

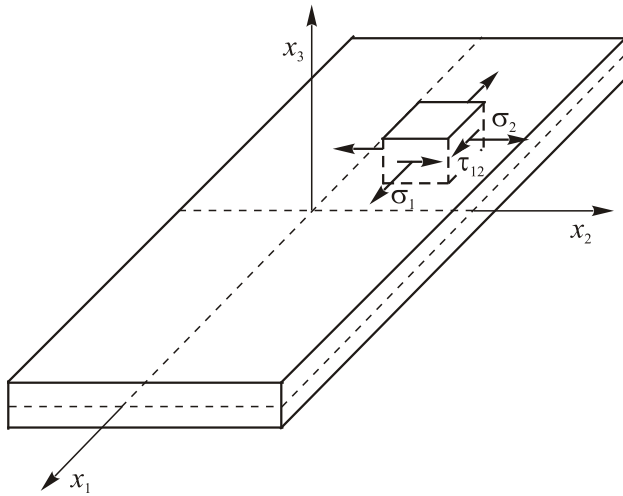
$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= Q_{11}\varepsilon_1 + Q_{12}\varepsilon_2 + Q_{16}\gamma_{12} \\
\sigma_2 &= Q_{21}\varepsilon_1 + Q_{22}\varepsilon_2 + Q_{26}\gamma_{12} \\
\tau_{12} &= Q_{61}\varepsilon_1 + Q_{62}\varepsilon_2 + Q_{66}\gamma_{12}
\end{aligned} \tag{6.29}$$

gdzie wprowadzono zredukowane sztywności Q_{ij} :

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}} & Q_{12} &= Q_{21} = C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}} \\
Q_{22} &= C_{22} - \frac{C_{23}^2}{C_{33}} & Q_{16} &= Q_{61} = C_{16} - \frac{C_{13}C_{63}}{C_{33}} \\
Q_{66} &= C_{66} - \frac{C_{63}^2}{C_{33}} & Q_{26} &= Q_{62} = C_{66} - \frac{C_{23}C_{63}}{C_{33}}
\end{aligned} \tag{6.30}$$

lub zapisując w skróconej formie:

$$Q_{ij} = C_{ij} - \frac{C_{i3}C_{j3}}{C_{33}} \quad \text{dla } i=1,2,6; \quad j=1,2,6. \tag{6.31}$$



Rys. 6.1. Płaski stan naprężenia w płaszczyźnie $x_1 - x_2$

6.4.1. Materiał ortotropowy

Dla płaskiego stanu naprężenia w materiale ortotropowym o głównych kierunkach ortotropii pokrywających się z osiami kartezjańskiego układu współrzędnych $x_1 - x_2$ (rys. 6.1) prawo Hooke'a redukuje się do postaci:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}\varepsilon_1 + \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}\varepsilon_2 \\ \sigma_2 &= \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}\varepsilon_1 + \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}\varepsilon_2 \\ \tau_{12} &= G_{12}\gamma_{12}\end{aligned}\tag{6.32}$$

lub w postaci odwrotnej:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E_1}\sigma_1 - \frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_2 \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E_2}\sigma_2 - \frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_1 \\ \gamma_{12} &= \frac{1}{G_{12}}\tau_{12}\end{aligned}\tag{6.33}$$

gdzie:

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}\tag{6.34}$$

W zapisie macierzowym powyższe zależności można przedstawić następująco:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [Q_{ij}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (6.35)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [S_{ij}] \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (6.36)$$

6.4.2. Materiał izotropowy

Dla materiału izotropowego związki (6.32)-(6.36) mają odpowiednio postać:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E}{1-\nu^2} \varepsilon_1 + \frac{\nu E}{1-\nu^2} \varepsilon_2 \\ \sigma_2 &= \frac{\nu E}{1-\nu^2} \varepsilon_1 + \frac{E}{1-\nu^2} \varepsilon_2 \\ \tau_{12} &= G\gamma_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{12} \end{aligned} \quad (6.37)$$

lub w postaci:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} \sigma_1 - \frac{\nu}{E} \sigma_2 \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} \sigma_2 - \frac{\nu}{E} \sigma_1 \\ \gamma_{12} &= \frac{1}{G} \tau_{12} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{12} \end{aligned} \quad (6.38)$$

Powyższe zależności w zapisie macierzowym można zapisać:

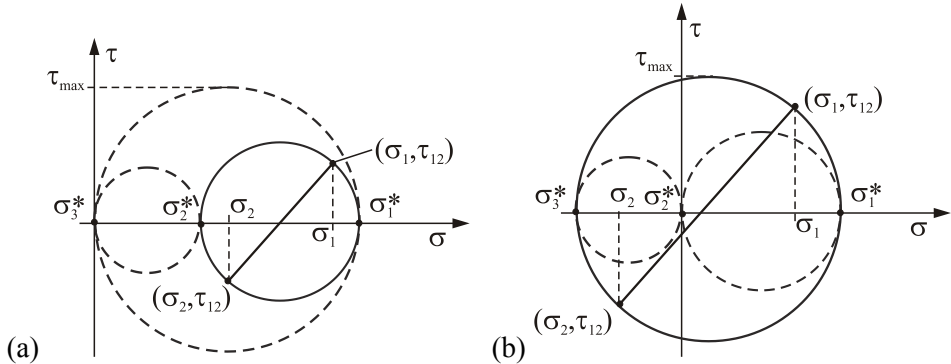
$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [Q_{ij}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (6.39)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [S_{ij}] \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (6.40)$$

6.5. Przykładowe hipotezy wytrzymałościowe dla materiałów izotropowych

6.5.1. Hipoteza największego naprężenia stycznego (τ_{\max})

Według hipotezy największego naprężenia stycznego (czyli tnącego) dla płaskiego stanu naprężenia opisanego przez składowe $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$ w zależności od wartości naprężeń składowych, znane z wytrzymałości materiałów koła Mohra, mogą przyjąć położenie jak na rys. 6.2, przy czym zgodnie z (2.28) $\tau_{21} = \tau_{12}$.



Rys. 6.2. Koło Mohra dla płaskiego stanu naprężenia

W pierwszym przypadku (rys. 6.2a) ekstremalne naprężenia główne obliczamy z zależności:

$$\begin{aligned}\sigma_1^* &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_{12}^2} > 0 \\ \sigma_2^* &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_{12}^2} > 0 \\ \sigma_3^* &= 0\end{aligned}\quad (6.41)$$

zaś zgodnie z (5.3) naprężenia zredukowane:

$$\sigma_{red} = |\sigma_1^* - \sigma_3^*| = \sigma_1^* = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_{12}^2} \quad (6.42)$$

W drugim przypadku (rys. 6.2b) odpowiednio:

$$\begin{aligned}\sigma_1^* &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_{12}^2} > 0 \\ \sigma_2^* &= 0\end{aligned}\quad (6.43)$$

$$\begin{aligned}\sigma_3^* &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_{12}^2} < 0 \\ \sigma_{red} &= |\sigma_1^* - \sigma_3^*| = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 4\tau_{12}^2}\end{aligned}\quad (6.44)$$

Dla tego ostatniego przypadku można wykazać, że

$$\tau_{12}^2 > \sigma_1 \sigma_2 \quad (6.45)$$

Jeśli spełniony jest warunek (6.45), to według hipotezy τ_{max} naprężenia zredukowane wyznaczamy ze wzoru (6.44), jeśli nie jest spełniony, to ze wzoru (6.42).

6.5.2. Hipoteza Hubera

Warunek wytrzymałościowy wg hipotezy Hubera (5.7) dla płaskiego stanu naprężenia ma postać:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 + 3\tau_{12}^2} \quad (6.46)$$

W praktyce inżynierskiej często występuje następujący stan naprężenia $\sigma_1 \neq 0$, $\tau_{12} \neq 0$, $\sigma_2 = 0$ i wówczas naprężenia zredukowane można wyznaczyć z zależności:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_1^2 + 3\tau_{12}^2} \quad (6.47)$$

Praktyczne stosowanie wzoru (6.46) jest znacznie łatwiejsze niż odpowiedniego wzoru wynikającego z hipotezy τ_{max} .

6.6. Kryteria zniszczenia dla materiałów ortotropowych dla płaskiego stanu naprężenia

W przypadkach, gdy mamy do czynienia z materiałami izotropowymi możemy korzystać z ogólnie znanych hipotez wytrzymałościowych takich jak np. hipoteza Hubera-Misesa-Hencky'ego (HMH) lub hipoteza Coulomba - maksymalnych naprężeń tnących. Natomiast dla materiałów ortotropowych konieczne jest zastosowanie innych, odpowiednich dla takich materiałów hipotez wytrzymałościowych. Podstawową hipotezą zaproponowaną dla materiałów ortotropowych jest hipoteza Hilla. Jest ona podstawą rozwoju dalszych kryteriów zniszczenia dla materiałów ortotropowych, w tym kompozytowych. We wszystkich kryteriach dla materiałów ortotropowych, materiał traktowany jest makroskopowo jako jednorodny.

Obecnie najczęściej stosuje się następujące trzy rodzaje kryteriów zniszczenia kompozytu uwzględniające różne właściwości wytrzymałościowe:

- kryterium maksymalnych naprężeń;
- kryterium maksymalnych odkształceń;
- kryteria interakcyjne naprężeń niszczących.

Powyższe kryteria są także najczęściej wykorzystywane w przepisach normatywnych. Pierwsze i ostatnie z wyżej wymienionych kryteriów wymaga przetransformowania składowych stanu naprężenia na naprężenia $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12})$ związane z głównymi kierunkami ortotropii materiału. Natomiast w przypadku kryterium maksymalnych odkształceń należy dokonać analogicznej transformacji odkształceń względnych.

6.6.1. Kryterium maksymalnych naprężeń

W hipotezie maksymalnych naprężeń, maksymalne naprężenia w głównych kierunkach ortotropii materiału (1-2) muszą być mniejsze od odpowiednich wytrzymałości:

$$-C_1 < \sigma_1 < T_1, \quad -C_2 < \sigma_2 < T_2, \quad -S < \tau_{12} < S \quad (6.48)$$

gdzie:

C_1, T_1 – wytrzymałość odpowiednio, na ściskanie i rozciąganie w kierunku 1.;

C_2, T_2 – wytrzymałość odpowiednio, na ściskanie i rozciąganie w kierunku 2. (prostopadłym do kierunku 1.);

S – wytrzymałość na ścinanie w płaszczyźnie (1-2).

Jeśli spełnione są wszystkie sześć nierówności (6.48), to zakładamy, że materiał nie ulegnie zniszczeniu. Jeśli natomiast choć jedna z tych nierówności nie jest spełniona, to materiał ulega zniszczeniu przez mechanizm zniszczenia związany odpowiednio z C_1, T_1, C_2, T_2, S .

6.6.2. Kryterium maksymalnych odkształceń

W hipotezie maksymalnych odkształceń, maksymalne odkształcenia względne w głównych kierunkach materiału (1-2) muszą być mniejsze od dopuszczalnych odkształceń względnych:

$$-C_{\varepsilon 1} < \varepsilon_1 < T_{\varepsilon 1}, \quad -C_{\varepsilon 2} < \varepsilon_2 < T_{\varepsilon 2}, \quad -S_{\varepsilon} < \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} < S_{\varepsilon} \quad (6.49)$$

gdzie:

- $C_{\varepsilon 1}, T_{\varepsilon 1}$ – dopuszczalne odkształcenia względne, odpowiednio, na ściskanie i rozciąganie w kierunku 1.;
- $C_{\varepsilon 2}, T_{\varepsilon 2}$ – dopuszczalne odkształcenia względne, odpowiednio, na ściskanie i rozciąganie w kierunku 2. (prostopadłym do kierunku 1.);
- S_{ε} – dopuszczalny kąt odkształcenia postaciowego na ścinanie w płaszczczyźnie (1-2).

W powyższych wzorach, zgodnie z (6.49), przyjęto oznaczenia:

$$\begin{aligned} C_{\varepsilon 1} &= C_1 / E_1, & T_{\varepsilon 1} &= T_1 / E_1, \\ C_{\varepsilon 2} &= C_2 / E_2, & T_{\varepsilon 2} &= T_2 / E_2, \\ S_{\varepsilon} &= S / G_{12} \end{aligned} \quad (6.50)$$

Jeśli spełnione są wszystkie nierówności (6.49), to materiał nie ulegnie zniszczeniu. W przeciwnym przypadku materiał ulega zniszczeniu.

Oba omówione powyżej kryteria określają różne wartości obciążeń niszczących konstrukcję z uwagi na występujące we wzorach liczby Poissona.

6.6.3. Kryteria interakcji naprężeń niszczących

Kryterium Hilla

Definiując naprężenie efektywne (zredukowane) σ_{eff} (2.48) dla płaskiego stanu naprężenia w sposób podobny do kryterium Hubera-Misesa-Hencky'ego sformułowanego dla materiałów izotropowych, kryterium Hilla można zapisać w postaci:

$$\sigma_{\text{red}}^2 \equiv \sigma_{\text{eff}}^2 = a_1 \sigma_1^2 + a_2 \sigma_2^2 - a_{12} \sigma_1 \sigma_2 + 3a_3 \tau_{12}^2 \quad (6.51)$$

gdzie: $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$ są składowymi naprężeniami w głównych kierunkach ortotropii, $a_1 \div a_3$ nazywane są parametrami anizotropii, σ_{eff} oznacza naprężenie efektywne, zaś σ_{red} naprężenia zredukowane.

Łatwo zauważyć, że kryterium Hilla sprowadza się do kryterium Hubera-Misesa dla materiałów izotropowych, gdy parametry $a_1 \div a_3$ są równe 1:

$$\sigma_{\text{red}}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 + 3\tau_{12}^2 \quad (6.52)$$

Parametry anizotropii w równaniu (6.51) mogą być określone na podstawie czterech niezależnych prób wytrzymałościowych, w których wyznaczono odpowiednio następujące granice plastyczności: dla prób rozciągania w głównych kierunkach ortotropii - σ_{10}, σ_{20} , dla próby czystego ścinania - τ_{120} i dodatkowo dla próby rozciągania w kierunku nachylonym pod kątem $\theta = 45^\circ$ do kierunków 1-2 - $\sigma_{\theta 0}$. I tak dla próby rozciągania w kierunku 1. mamy:

$$a_1 = \sigma_{\text{red}}^2 / (\sigma_{10})^2 \quad (6.53)$$

gdzie: $\sigma_{\text{red}} = \sigma_0$, zaś σ_0 oznacza granicę plastyczności przy jednokierunkowym rozciąganiu w kierunku odniesienia, a σ_{10} jest granicą plastyczności w kierunku 1. Jeśli przyjmiemy kierunek 1. jako kierunek odniesienia, wówczas $a_1 = 1$.

Postępując podobnie dla pozostałych prób, wyznaczamy:

$$a_2 = \sigma_{\text{red}}^2 / \sigma_{20}^2, \quad a_3 = \sigma_{\text{red}}^2 / (3\tau_{120}^2), \quad a_{\theta 0} = \sigma_{\text{red}}^2 / \sigma_{\theta 0}^2, \quad (6.54)$$

gdy: $\theta = 45^\circ$ wówczas $a_{12} = a_1 + a_2 + 3a_3 - 4a_{\theta 0}$.

Ponieważ dla większości materiałów znane są jedynie wartości - $\sigma_{10}, \sigma_{20}, \tau_{120}$ w praktycznych zastosowaniach dla współczynnika a_{12} przyjmuje się uproszczone zależności np.:

$$a_{12} = \frac{\sigma_{\text{red}}^2}{\sigma_{10}\sigma_{20}} \quad (6.55)$$

Kryteria interakcyjne dla materiałów o różnych właściwościach na rozciąganie i ściskanie

W kryterium Hilla przyjmuje się jednakowe wytrzymałości na rozciąganie i ściskanie w głównych kierunkach ortotropii 1–2. Omówione pierwsze dwa kryteria nie uwzględniają oddziaływania pomiędzy formami zniszczenia. Kryteria zniszczenia, w których uwzględniono różnice pomiędzy zachowaniem się materiałów podczas rozciągania i ściskania można zapisać w najbardziej znanej i najczęściej stosowanej postaci:

$$f = k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2 + k_{11}\sigma_1^2 + k_{22}\sigma_2^2 - k_{12}\sigma_1\sigma_2 + 3k_{33}\tau_{12}^2 = 1 \quad (6.56)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{T_1} - \frac{1}{C_1}, & k_{11} &= \frac{1}{T_1 C_1}, & k_2 &= \frac{1}{T_2} - \frac{1}{C_2}, \\ k_{22} &= \frac{1}{T_2 C_2}, & k_{33} &= \frac{1}{3S^2} \end{aligned} \quad (6.57)$$

Wartości współczynnika k_{12} mogą być określane w różny sposób:

- kryterium Tsai-Wu [33,34]:

$$k_{12} = \sqrt{\frac{1}{T_1 C_1 T_2 C_2}} \quad (6.58)$$

- kryterium Hoffmana [14]:

$$k_{12} = \frac{1}{T_1 C_1} \quad (6.59)$$

- kryterium Wilczyńskiego [37]:

$$k_{12} = \frac{2}{T_1 T_2 + C_1 C_2} \quad (6.60)$$

- kryterium Cui, Wisnoma i Jonesa [6]:

$$k_{12} = 0 \quad (6.61)$$

- kryterium Pucka [29]:

$$k_{12} = 0 \quad \text{oraz ponadto} \quad \sigma_1 \leq T_1; \quad -\sigma_1 \geq C_1 \quad (6.62)$$

W przypadku jednakowej wytrzymałości na rozciąganie i ściskanie (tzn. $T_1 = C_1$ i $T_2 = C_2$ zgodnie z (6.57) $k_1 = k_2 = 0$) oraz uwzględniając (6.59) dla $k_{12} = 1/(T_1 C_1)$ otrzymano ostatecznie zależność:

$$f = k_{11}\sigma_1^2 + k_{22}\sigma_2^2 - k_{12}\sigma_1\sigma_2 + 3k_{33}\tau_{12}^2 = 1 \quad (6.63)$$

identyczną z kryterium Tsai-Hilla [1,13].

Stosowalność kryterium Tsai-Hilla może być rozszerzona poprzez przyjęcie w równaniu (6.63) następującej modyfikacji zapisu współczynników [1,13]:

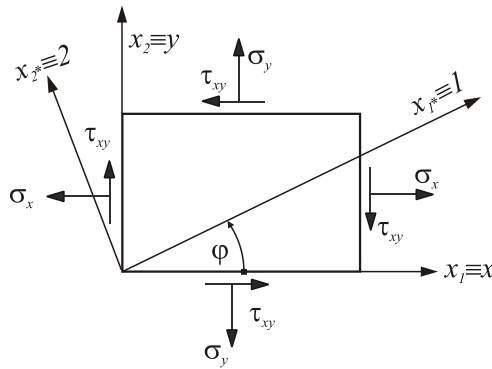
$$k_{11} = \frac{1}{X_1^2}, \quad k_{22} = \frac{1}{X_2^2}, \quad k_{12} = \frac{1}{X_1^2}, \quad k_{33} = \frac{1}{3S^2} \quad (6.64)$$

gdzie litera X zastępowana jest przez T lub C w zależności od znaku naprężeń, odpowiednio, rozciągających lub ściskających.

6.7. Przykłady zastosowań kryteriów zniszczenia dla płaskiego stanu naprężenia

W przypadku materiałów ortotropowych, gdy kierunki składowych stanu naprężenia nie pokrywają się z głównymi kierunkami ortotropii, należy dokonać transformacji tych naprężeń do głównych kierunków ortotropii.

Rozpatrzmy przypadek materiału ortotropowego, w którym składowe płaskiego stanu naprężenia $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$ (rys. 6.3) tworzą zorientowany kąt φ z kierunkami głównymi ortotropii x_1^*, x_2^* (porównaj rys. 2.10).



Rys. 6.3. Składowe stanu naprężenia w układzie obróconym

Jeśli układ osi współrzędnych $x_1 - x_2$ zastąpimy odpowiednio przez $x - y$ oraz składowe stanu naprężenia $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ oznaczmy odpowiednio: $\sigma_x = \sigma_{11}$, $\sigma_y = \sigma_{22}$, $\tau_{xy} = \sigma_{12}$, zaś główne kierunki ortotropii $x_1^* - x_2^*$ odpowiednio przez 1–2 oraz składowe stanu naprężenia dla głównych kierunków ortotropii zgodnie z (2.36) $\sigma_1 = \sigma_{1^*1^*}$, $\sigma_2 = \sigma_{2^*2^*}$ i $\tau_{12} = \sigma_{1^*2^*}$ to po transformacji otrzymamy, zgodnie z (2.32), zależności:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \\ \sigma_2 &= \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi - 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \\ \tau_{12} &= -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)\end{aligned}\tag{6.65}$$

Podstawiając związki (6.65) do (6.48) otrzymano związki określające kryterium maksymalnych naprężeń dla składowych stanu naprężenia $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ w obróconym układzie osi współrzędnych:

$$\begin{aligned}
-C_1 &\leq \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \leq T_1 \\
-C_2 &\leq \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi - 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \leq T_2 \\
-S &\leq -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \leq S
\end{aligned} \tag{6.66}$$

Wykorzystując zależności (6.33) wyrażono odkształcenia poprzez składowe naprężenia:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E_1} - \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_2 = \frac{\sigma_1}{E_1} - \frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_2 \\
\varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E_2} - \frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_1 = \frac{\sigma_2}{E_2} - \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_1 \\
2\varepsilon_{12} &= \gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_{12}}
\end{aligned} \tag{6.67}$$

Wprowadzając (6.65) do (6.67) oraz uwzględniając (6.50), kryterium maksymalnych odkształceń (6.49) dla rozważanego przypadku można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned}
-C_1 &\leq \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi + \\
&\quad -\nu_{12} (\sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi - 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi) \leq T_1 \\
-C_2 &\leq \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi - 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi + \\
&\quad -\nu_{21} (\sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi) \leq T_2 \\
-S &\leq -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \leq S
\end{aligned} \tag{6.68}$$

Zaś podstawiając (6.65) do (6.56) można otrzymać kryteria interakcyjne dla składowych $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$.

Powyższe zależności mogą ulec znacznym uproszczeniom, w przypadku, gdy tylko jedna ze składowych stanu naprężenia jest różna od zera (tzw. jednokierunkowy stan naprężenia). Założono, że:

$$\sigma_x \neq 0 \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \tag{6.69}$$

Po podstawieniu (6.69) do (6.66) otrzymano następujące zależności określające maksymalną wartość naprężenia σ_x dla kryterium maksymalnych naprężeń:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &\leq T_1 / \cos^2 \varphi & \sigma_x &\geq -C_1 / \cos^2 \varphi \\
\sigma_x &\leq T_2 / \sin^2 \varphi & \sigma_x &\geq -C_2 / \sin^2 \varphi \\
\sigma_x &\leq S / (\sin \varphi \cos \varphi)
\end{aligned} \tag{6.70}$$

zaś (6.69) do (6.68) otrzymano dla kryterium maksymalnych odkształceń związki na maksymalną wartość naprężenia σ_x :

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &\leq \frac{T_1}{\cos^2 \varphi - \nu_{12} \sin^2 \varphi} & \sigma_x &\geq -\frac{C_1}{\cos^2 \varphi - \nu_{12} \sin^2 \varphi} \\
 \sigma_x &\leq \frac{T_2}{\sin^2 \varphi - \nu_{21} \cos^2 \varphi} & \sigma_x &\geq -\frac{C_2}{\sin^2 \varphi - \nu_{21} \cos^2 \varphi} \\
 \sigma_x &\leq \frac{S}{\sin \varphi \cos \varphi}
 \end{aligned} \quad (6.71)$$

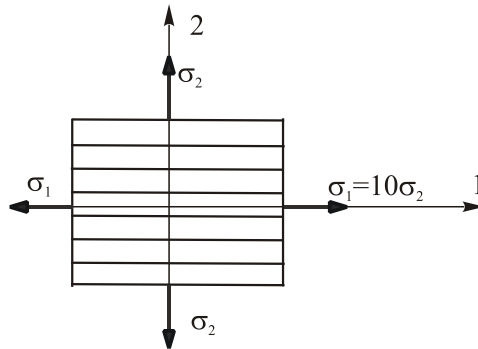
W przypadku jednakowych wytrzymałości na rozciąganie i ściskanie w kierunkach 1–2 (tzn. $T_1 = C_1$, $T_2 = C_2$) można wykorzystać kryterium Tsai-Hilla (6.63), które prowadzi do związku:

$$\frac{\cos^4 \varphi}{T_1} + \left(\frac{1}{S^2} - \frac{1}{T_1^2} \right) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \frac{\sin^4 \varphi}{T_2^2} = \frac{1}{\sigma_x^2} \quad (6.72)$$

Przedstawione hipotezy pokazują podstawowe różnice pomiędzy nimi. W celu ich uwidocznienia rozpatrzono dwa przykłady.

Przykład 6.1

Laminat jest zbudowany z jednokierunkowego materiału kompozytowego (szkło-epoksyd) o następujących stałych inżynierskich: $E_1=46$ GPa, $E_2=10$ GPa, $G=4,6$ GPa, $\nu_{12}=0,31$ ($\nu_{21}=E_2 \nu_{12}/E_1$), $C_1=910$ MPa, $T_1=1400$ MPa, $C_2=110$ MPa, $T_2=35$ MPa, $S=70$ MPa. Dla laminatu obciążonego naprężeniami: $\sigma_1=10 \cdot \sigma_2$ oraz σ_2 wyznaczyć wartości naprężeń σ_1 i σ_2 dla poszczególnych kryteriów.



Rys. 6.4. Obciążenie laminatu naprężeniami głównymi σ_1 i σ_2

Rozwiązanie

Naprężenia σ_1 i σ_2 są naprężeniami głównymi (bo $\tau_{12}=0$) o kierunkach pokrywających się z głównymi kierunkami ortotropii. Z tych względów nie trzeba dokonać transformacji składowych stanu naprężenia zgodnie z (6.65). W tym przypadku kąt $\varphi=0$. Naprężenia σ_1 i σ_2 są naprężeniami rozciągającymi.

Tablica 6.1. Wartości naprężeń σ_1 i σ_2 dla różnych kryteriów zniszczenia

Lp	Nazwa kryteriów zniszczenia	$\sigma_1=10\sigma_2$ [MPa]	σ_2 [MPa]	Uwagi
1	Maksymalnych naprężeń (6.48)	350,0	35,0	aktywne ograniczenie T_2
2	Maksymalnych odkształceń (6.49)	107,3	10,73	aktywne ograniczenie $T_{\varepsilon_2}= T_2/\varepsilon_2$
3	kryterium Tsai-Hill (6.64)	340,5	34,05	
4	kryterium Tsai-Wu (6.58)	419,6	41,96	
5	kryterium Hoffmana (6.59)	360,3	36,23	
6	kryterium Wilczyńskiego (6.60)	278,3	27,83	
7	kryterium Cui, Wisnoma i Jonesa (6.61); kryterium Pucka (6.62)	359,7	35,97	

Wartości naprężeń σ_1 i σ_2 otrzymane przy wykorzystaniu kryterium maksymalnych naprężeń i odkształceń różnią się około 3 razy. W omówionych przypadkach założono liniową sprężystość aż do zniszczenia materiału. W zastosowaniach praktycznych zależności pomiędzy granicznymi (niszczącymi) naprężeniami i odkształceniami są bardziej złożone.

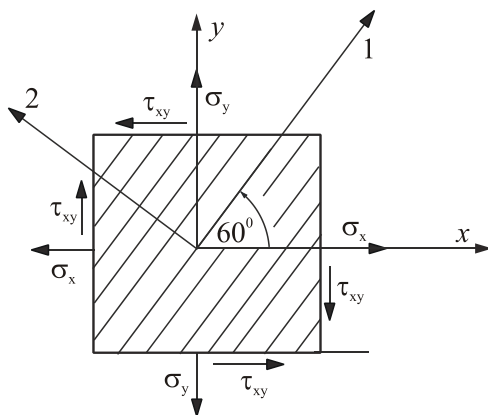
Przykład 6.2

Dla laminatu obciążonego w płaskim stanie naprężenia następującymi naprężeniami: σ_x , σ_y , τ_{xy} (rys. 6.5) założono następujące relacje pomiędzy naprężeniami: $\sigma_x=2\sigma$, $\sigma_y=-3\sigma$, $\tau_{xy}=4\sigma$, gdzie $\sigma>0$. Włókna kompozytu ułożone są pod kątem $\varphi=60^\circ$. Przyjęto następujące stałe materiałowe: $E_1=43,9$ GPa, $E_2=15,4$ GPa, $G=4,34$ GPa, $\nu_{12}=0,3$ ($\nu_{21}=E_2 \nu_{12}/E_1$), $C_1=1458$ MPa, $T_1=1428$ MPa, $C_2=199$ MPa, $T_2=67$ MPa, $S=94$ MPa. Wyznaczyć maksymalne wartości naprężenia σ wykorzystując różne kryteria.

Rozwiązanie

Kierunki składowych stanu naprężenia nie pokrywają się z kierunkami głównymi ortotropii (ułożenia włókien wzmacniających). Z powyższych względów należy dokonać transformacji składowych stanu naprężenia do kierunków głównych zgodnie z (6.65) dla kąta $\varphi=60^\circ$. Zależności (6.66) umożliwiają bez-

pośrednie wykorzystanie kryterium maksymalnych naprężeń, zaś (6.8) odpowiednio kryterium maksymalnych odkształceń. Dla pozostałych kryteriów wartości składowych naprężeń σ_1 , σ_2 , τ_{12} w kierunkach głównych ortotropii są podstawiane do odpowiednich kryteriów. Wyniki obliczeń zestawiono w tabeli 6.2.



Rys. 6.5. Obciążenie laminatu naprężeniami głównymi σ_x , σ_y , τ_{xy}

Tablica 6.2. Wartości naprężenia σ dla różnych kryteriów zniszczenia

Lp	Nazwa kryteriów zniszczenia	σ [MPa]	Uwagi
1	Maksymalnych naprężeń (6.48)	22,56	aktywne ograniczenie S
2	Maksymalnych odkształceń (6.49)	22,56	aktywne ograniczenie $S_e = S/G_{12}$
3	kryterium Tsai-Hill (6.64)	16,64	
4	kryterium Tsai-Wu (6.58)	25,79	
5	kryterium Hoffmana (6.59)	25,95	
6	kryterium Wilczyńskiego (6.60)	26,28	
7	kryterium Cui, Wisnoma i Jonesa (6.61); kryterium Pucka (6.62)	25,96	

Dla analizowanego przypadku wartości naprężenia σ wyznaczone dla różnych kryteriów różnią się niewiele dla wszystkich przypadków z wyjątkiem kryterium Tsai-Hilla dla którego otrzymano najniższą wartość.

7. PODSTAWOWE RÓWNANIA CIENKOŚCIENNYCH PROSTOKĄTNYCH PŁYT KOMPOZYTOWYCH

7.1. Podstawowe założenia

W *klasycznej teorii cienkich płyt* przyjmuje się następujące podstawowe założenia [1,28,30,31,38]:

- grubość płyty jest stała;
- grubość płyty jest mała (wielokrotnie mniejsza) w porównaniu z jej długością i szerokością;
- naprężenia w płaszczyźnie płyty (płaszczyzna x - y) są dominujące. Wtedy naprężenia normalne σ_z w kierunku prostopadłym do płyty przyjmuje się równe zero, natomiast naprężenia styczne w płaszczyznach prostopadłych do powierzchni płyty τ_{xz} , τ_{yz} przyjmuje się jako małe wielkości w porównaniu ze składowymi naprężeniami σ_x , σ_y , τ_{xy} działającymi w płaszczyźnie płyty. Oznacza to, że zakłada się płaski stan naprężenia w płycie;
- płyta jest wykonana z materiału liniowo sprężystego czyli podlegającemu prawu Hooke'a;
- obowiązuje hipoteza Kirchhoffa-Love'a zakładająca, że punkty płyty leżące przed obciążeniem na normalnej do powierzchni środkowej x - y po wyboczeniu pozostają również na normalnej do ugiętej powierzchni środkowej. Ponadto w hipotezie tej pomija się następujące składowe stanu odkształcenia γ_{xz} , γ_{yz} i ϵ_z ;
- przemieszczenia powierzchni środkowej płyty nie zależą od współrzędnej z ;
- odkształcenia ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} są nieskończenie małe;

Ponadto, przyjęto następujące założenia *klasycznej teorii płyt wielowarstwowych* [1-5,15-19,21,24,27]:

- każda warstwa jest ortotropowa i ma stałą grubość;
- każda z warstw indywidualnych płyty jest wykonana z materiału liniowo sprężystego (podlegającemu prawu Hooke'a);
- pomija się naprężenia pomiędzy warstwami w płycie wielowarstwowej;
- płyta wielowarstwowa odkształca się jako monolit spełniając tym samym założenia Kirchhoffa-Love'a.

Należy zauważyć, że nie poczyniono *explicite* żadnych założeń dotyczących włókien i matrycy (ośrodka macierzystego) tworzących warstwę indywidualną (laminę). Kompozyt warstwowy (laminat) tworzą cienkie warstwy indywidualne, w których włókna są ułożone w różnych kierunkach dając odpowiednio, w wybranych kierunkach, pożądane właściwości. Każda warstwa indywidualna i kompozyt traktowane są jako continuum materiałowe. Założenie to implikuje automatycznie opis na poziomie makro-mechaniki. Przyjmuje się, że składniki warstwy indywidualnej (tzn. matryca i włókna) są jednorodne, izotropowe, liniowo sprężyste i są ze sobą doskonale połączone. Zatem ograniczenia dotyczą jedynie, w skali makro, rozmytej czyli zhomogenizowanej warstwy - materiału ortotropowego, co jest istotą klasycznej teorii płyt kompozytowych.

7.2. Stan odkształcenia

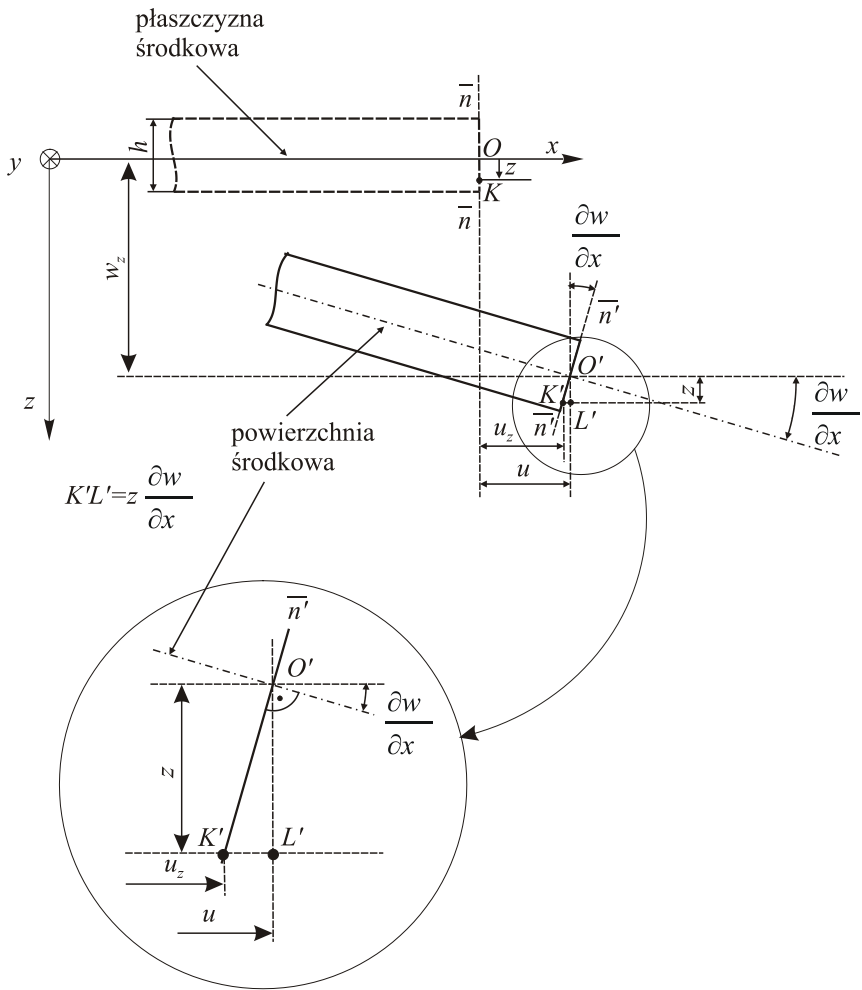
Dla płyty prostokątnej wprowadzono prawoskrętny kartezjański układ osi współrzędnych $x \equiv x_1$, $y \equiv x_2$, $z \equiv x_3$, przy czym osie x, y wyznaczają powierzchnię środkową płyty połowiącą grubość płyty w przypadku płyt wielowarstwowych. Nie należy utożsamiać, że środki ciężkości przekrojów poprzecznego płyty pokrywa się z powierzchnią środkową.

Przemieszczenia powierzchni środkowej płyty w kierunkach x, y, z oznaczono odpowiednio $u \equiv u_1$, $v \equiv u_2$, $w \equiv u_3$. Składowe przemieszczenia dowolnego punktu powierzchni środkowej są funkcjami współrzędnych x, y , czyli $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ i $w = w(x, y)$. Natomiast przemieszczenia dowolnego punktu o współrzędnej z w układzie podstawowym (przed odkształceniem) oznaczono u_z, v_z, w_z (rys. 7.1).

Pod wpływem działającego obciążenia zewnętrznego dowolny punkt płyty K o współrzędnych x, y, z doznaje zmiany położenia do punktu K' , który zgodnie z rys. 7.1, określony jest przez składowe u_z, v_z, w_z w następujący sposób:

$$u_z(x, y, z) = u(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (7.1)$$

Znak minus przy drugim składniku w powyższym wzorze wynika ze względu na kierunek przemieszczenia przeciwny do dodatniego zwrotu osi x .

**Rys. 7.1.** *Odkształcenia płyty*

Analogicznie można zapisać dla składowej przemieszczenia w kierunku osi y :

$$v_z(x, y, z) = v(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (7.2)$$

zaś składowa przemieszczenia w_z (tzw. ugięcie płyty) odniesiona jest do powierzchni środkowej płyty:

$$w_z(x, y, z) \equiv w(x, y) \quad (7.3)$$

W zależnościach (7.1) i (7.2) wielkości $\frac{\partial w}{\partial x}$ i $\frac{\partial w}{\partial y}$ opisują obroty od prostej normalnej \bar{n} do płaszczyzny środkowej przed działaniem obciążenia zewnętrznego do prostej normalnej \bar{n}' do powierzchni środkowej po odkształceniu.

W przypadku, gdy stan odkształcenia w dowolnym punkcie z dostateczną dokładnością może być opisany poprzez małe (czasami też nazywane nieskończenie małe) odkształcenia, zgodnie z (3.6), to po uwzględnieniu zależności (7.1)–(7.3) równania kinematyczne mają postać:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial x} + z \kappa_x \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial v}{\partial y} + z \kappa_y \\ \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + z \kappa_{xy}\end{aligned}\quad (7.4)$$

gdzie wprowadzono, analogicznie do znanych z wytrzymałości materiałów wzorów na krzywiznę belek, oznaczenia na krzywizny:

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \kappa_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (7.5)$$

Jak łatwo zauważyć na podstawie zależności (7.4) stan odkształcenia w cienkiej płycie opisany jest przez składowe przemieszczenia powierzchni środkowej u, v, w i ich pochodne. Z tych względów klasyczna teoria cienkich płyt jest czasami nazywana teorią trzy parametrową.

7.3. Mikromechaniczne właściwości warstwy – moduły efektywne

Warstwę indywidualną (laminę), podstawowy element składowy laminatu, tworzą włókna wzdłużne rozmieszczone w matrycy (ośrodku macierzystym). Mikromechaniczna analiza warstwy umożliwia określenie przewidywanych właściwości sprężystych warstwy na podstawie znanych właściwości jej składników, czyli zastąpienie ciała niejednorodnego ciałem jednorodnym z uśrednionymi właściwościami materiałowymi tak opisanego materiału. Jedną z najczęściej wykorzystywanych teorii do opisu makroskopowych właściwości mechanicznych warstwy jest *teoria mieszanin* bazująca na homogenizacji (czyli rozmyciu) materiałów warstwy.

Istnieje duża różnorodność postępowania i sposobu wyprowadzenia równań pozwalających homogenizować materiały kompozytowe. W związku z powyższym

ograniczono się jedynie do zasygnalizowania problemu i pokazania różnorodności przybliżeń dla kompozytów włókniстых o jednokierunkowym ułożeniu włókien.

Założono, że uśrednione efektywne właściwości laminy można uzyskać poprzez analizę struktury materiałowej i geometrycznej pojedynczej typowej komórki nazywanej reprezentatywną komórką mikro periodyczności. Każda warstwa wykonana jest z dwóch materiałów składowych o znanych właściwościach mechanicznych.

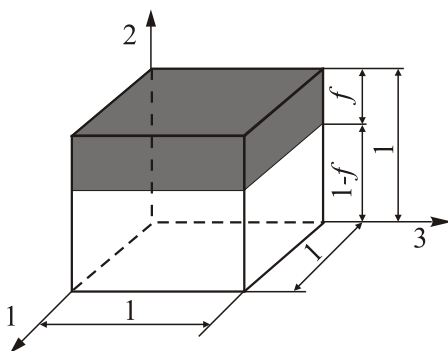
W większości wzorów wyróżnia się wielkość, która mówi o objętościowej zawartości poszczególnych składników komórki. Przyjmując, że składa się ona z dwu komponentów można zapisać następującą zależność:

$$V = V_m + V_f, \quad (7.6)$$

gdzie: V - objętością komórki periodyczności, V_m - objętość matrycy (indeks m – *matrix*, ang.), V_f - objętościowa zawartość włókien (indeks f – *fibre*, ang.).

Ponieważ wzmocnienie komórki stanowią włókna to przyjmuje się, że wielkością określającą ilość poszczególnych komponentów będzie stopień wzmocnienia f (objętościowa zawartość włókien - *fibre volume fraction*, ang.), którą określa się jako:

$$f = \frac{V_f}{V} \quad (7.7)$$



Rys. 7.2. Model kompozytu warstwowego

Najprostsze równania określające efektywne właściwości warstwy dla komponentów izotropowych oparte są na modelach Voighta dla kierunku włókien

i Reussa dla kierunku prostopadłego do kierunku włókien (rys. 7.2). W modelu Voighta zakłada się, że odkształcenia matrycy i włókien są stałe w kierunku wzdłużnym, zaś w modelu Reussa stałość naprężeń poprzecznych. Stosując powyższe założenia wyprowadzono zależności określające moduły efektywne [1-4,15,16,18,38]:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= fE_f + (1-f)E_m, \\
 \frac{1}{E_2} &= f\frac{1}{E_f} + (1-f)\frac{1}{E_m}, \\
 \frac{1}{G} &= f\frac{1}{G_f} + (1-f)\frac{1}{G_m}, \\
 \nu_{12} &= f\nu_f + (1-f)\nu_m, \\
 \nu_{21} &= E_2\nu_{12}/E_1.
 \end{aligned} \tag{7.8}$$

W powyższych zależnościach wprowadzono następujące oznaczenia:

E_1, E_2 - moduły sprężystości Younga, odpowiednio, w pierwszym (1.) i drugim (2.) kierunku (rys. 7.2);

ν_{ij} - liczby Poissona, dla których odkształcenia poprzeczne są w kierunku j , zaś naprężenie w kierunku i ;

$G = G_{12}$ - moduł odkształcenia postaciowego (Kirchhoffa) w płaszczyźnie 1-2.

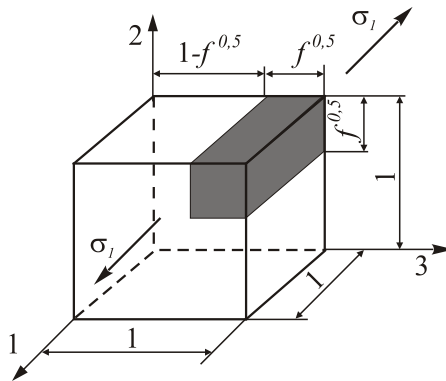
Ponadto ze względu na założenie izotropowości składników warstwy (tzn. matrycy i włókien):

E_m, E_f - moduły sprężystości Younga, odpowiednio, dla matrycy i włókien;

ν_m, ν_f - liczby Poissona, odpowiednio, dla matrycy i włókien;

G_m, G_f - moduł odkształcenia postaciowego (Kirchhoffa), odpowiednio, dla matrycy i włókien.

Można założyć także inny model kompozytu przedstawiony na rys. 7.3.



Rys. 7.3. Komórka periodyczności o wymiarach jednostkowych obciążona w kierunku 1

Rozpatrzono komórkę periodyczności (rys. 7.3) o wymiarach jednostkowych składającą się z matrycy i włókna wzmacniającego o tak dobranych polach przekroju, aby objętościowa ilość włókna wynosiła f , natomiast objętościowa ilość matrycy, zgodnie z (7.6) i (7.7), $(1-f)$.

W tym przypadku zastępcze moduły efektywne wyrażają się wzorami [21,37]:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= E_m(1-f) + E_f f \\
 \nu_{21} &= \nu_f \sqrt{f} + \nu_m(1-\sqrt{f}) \\
 E_2 &= E_m \frac{E_m(1-\sqrt{f}) + E_f \sqrt{f}}{E_m[1-\sqrt{f}(1-\sqrt{f})] + E_f \sqrt{f}(1-\sqrt{f})} \\
 G &= G_m \frac{G_m \sqrt{f}(1-\sqrt{f}) + G_f[1-\sqrt{f}(1-\sqrt{f})]}{G_m \sqrt{f} + G_f(1-\sqrt{f})}
 \end{aligned} \tag{7.9}$$

7.4. Makroskopowe właściwości mechaniczne warstwy

Znajomość efektywnych właściwości sprężystych każdej warstwy pozwala zamodelować ją jako materiał ortotropowy o głównych kierunkach ortotropii równoległych i prostopadłych do włókien (rys. 7.4).

Zależność pomiędzy składowymi stanu naprężenia i składowymi stanu odkształcenia w płaskim stanie naprężenia dla materiału ortotropowego o głównych kierunkach materiałowych w lokalnym układzie współrzędnych (osie 1-2), przedstawionych na rys. 7.4, ma zgodnie z oznaczeniami (6.11) oraz zależnościami (6.32) lub (6.35) następującą postać:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [Q] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{7.10}$$

gdzie Q_{ij} można wyrazić za pomocą tzw. stałych inżynierskich (6.35):

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \\
 Q_{12} &= Q_{21} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \\
 Q_{22} &= \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \\
 Q_{66} &= G \equiv G_{12}.
 \end{aligned} \tag{7.11}$$

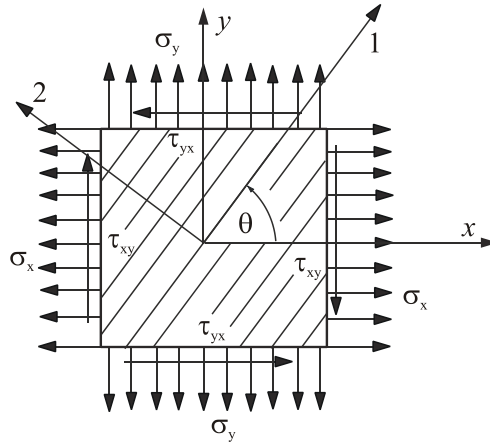
W powyższych zależnościach wprowadzono następujące oznaczenia:

- E_1, E_2 - moduły sprężystości Younga, odpowiednio, w pierwszym (1.) i drugim (2.) kierunku;
 ν_{ij} - liczby Poissona, dla których odkształcenia poprzeczne są w kierunku j , zaś naprężenie w kierunku i ;
 G - moduł odkształcenia postaciowego (Kirchhoffa) w płaszczyźnie 1-2.;
 i gdzie zgodnie z (6.34)

$$E_1 \nu_{21} = E_2 \nu_{12} \quad (7.12)$$

W przypadku materiału izotropowego elementy macierzy Q_{ij} można wyrazić związkami:

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= Q_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}, \\
 Q_{12} &= Q_{21} = \frac{\nu E}{1-\nu^2}, \\
 Q_{66} &= G = \frac{E}{2(1+\nu)}.
 \end{aligned} \quad (7.13)$$



Rys. 7.4. Definicja globalnego i lokalnego układu współrzędnych

Główne kierunki ortotropii związane z lokalnym układem współrzędnych (1-2) najczęściej nie pokrywają się z „naturalnym” układem współrzędnych wyznaczonym przez geometrię płyty, czyli z globalnym układem współrzędnych (x-y). Rozpatrzmy płytę ortotropową obciążoną w jej płaszczyźnie i tworzącą zorientowany kąt θ z głównymi osiami ortotropii (1-2) (rys. 7.4). Konieczne jest określenie wzorów transformacyjnych dla naprężeń i odkształceń wynikających z elementarnej mechaniki materiałów (które w graficznej formie są dobrze znanym kołem Mohra). Dla dwuwymiarowego przypadku, pokazanego na rys. 7.4, składowe stanu naprężenia z lokalnego układu (1-2) transformują się do układu globalnego współrzędnych (x-y), zgodnie z (2.29), według zależności:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (7.14)$$

i analogicznie składowe stanu odkształcenia zgodnie z (3.9):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 0,5\gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ 0,5\gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (7.15)$$

gdzie:

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} \quad \text{i} \quad \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}. \quad (7.16)$$

Górny wskaźnik -1 w zależnościach (7.14) i (7.15) oznacza macierz odwrotną macierzy $[T]$:

$$[T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

gdzie: $m = \cos\theta$, $n = \sin\theta$, a θ jest kątem od osi x do osi 1 (patrz rys. 7.4). Macierz $[T]^{-1}$ można także zapisać przez zamianę θ na $(-\theta)$ w macierzy $[T]$.

Odształcenia transformują się identycznie jak naprężenia, jeśli w składowych stanu odkształcenia wykorzystać składową odkształcenia postaciowego (7.16).

Płyty kompozytowe składają się z kilku lub kilkunastu warstw indywidualnych różnie zorientowanych w globalnym układzie współrzędnych związanym z płytą-laminatem (x, y, z) . Oś z jest prostopadła do globalnego i lokalnego układów współrzędnych pokazanych na rys. 7.4.

Zależność pomiędzy naprężeniami i odkształceniami, tzw. związki konstytutywne, dla globalnego układu mają postać:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}] \cdot \{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (7.18)$$

zaś zależności wiążące ze sobą macierze sztywności w globalnym i lokalnym układzie można zapisać:

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1} [Q] [T]^T \quad (7.19)$$

gdzie górny indeks T oznacza macierz transponowaną.

W globalnym układzie współrzędnych elementy macierzy sztywności \bar{Q}_{ij} (7.18) przyjmują postać:

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{11} &= Q_{11}m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}n^4, \\
\bar{Q}_{12} &= \bar{Q}_{21} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})m^2n^2 + Q_{12}(m^4 + n^4), \\
\bar{Q}_{22} &= Q_{11}n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}m^4, \\
\bar{Q}_{16} &= \bar{Q}_{61} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})m^3n + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})mn^3, \\
\bar{Q}_{26} &= \bar{Q}_{62} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})mn^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})m^3n, \\
\bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{66}(m^4 + n^4).
\end{aligned} \tag{7.20}$$

Występujące w równaniach (7.20) zależności trygonometryczne można zapisać także w następującej postaci:

$$\begin{aligned}
m^4 &\equiv \cos^4 \theta = (3 + 4 \cos 2\theta + \cos 4\theta) / 8, \\
m^3n &\equiv \cos^3 \theta \sin \theta = (2 \sin 2\theta + \sin 4\theta) / 8, \\
m^2n^2 &\equiv \cos^2 \theta \sin^2 \theta = (1 - \cos 4\theta) / 8, \\
mn^3 &\equiv \cos \theta \sin^3 \theta = (2 \sin 2\theta - \sin 4\theta) / 8, \\
n^4 &\equiv \sin^4 \theta = (3 - 4 \cos 2\theta + \cos 4\theta) / 8.
\end{aligned} \tag{7.21}$$

Macierz sztywności (7.19) ma w ogólnym przypadku wszystkie niezerowe składowe \bar{Q}_{ij} , w przeciwieństwie do macierzy sztywności zapisanej w głównych kierunkach ortotropii Q_{ij} . Płyta warstwowa wydaje się być materiałem anizotropowym. Jednak macierz sztywności (7.18) zależy od czterech niezależnych stałych materiałowych w każdej warstwie ortotropowej.

Macierz sztywności (7.20) można zapisać w prostszej formie:

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{11} &= U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta \\
\bar{Q}_{12} &= \bar{Q}_{21} = U_4 - U_3 \cos 4\theta \\
\bar{Q}_{22} &= U_1 - U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta \\
\bar{Q}_{16} &= \bar{Q}_{61} = -0.5U_2 \sin 2\theta - U_3 \sin 4\theta \\
\bar{Q}_{26} &= \bar{Q}_{62} = -0.5U_2 \sin 2\theta + U_3 \sin 4\theta \\
\bar{Q}_{66} &= U_5 - U_3 \cos 4\theta
\end{aligned} \tag{7.22}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
U_1 &= (3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}) / 8, \\
U_2 &= (Q_{11} - Q_{22}) / 2, \\
U_3 &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66}) / 8, \\
U_4 &= (Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66}) / 8, \\
U_5 &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66}) / 8.
\end{aligned} \tag{7.23}$$

Bezpośrednio z (7.22) wynikają poniższe zależności:

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{11} + \bar{Q}_{22} + 2\bar{Q}_{12} &= Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{12}, \\ \bar{Q}_{66} - \bar{Q}_{12} &= Q_{66} - Q_{12}.\end{aligned}\quad (7.24)$$

Analiza zależności (7.22) i (7.24) prowadzi do stwierdzenia, że dla szczególnego kąta θ_0 :

$$\cos 2\theta_0 = \pm \frac{Q_{11} - Q_{22}}{2(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66})} \quad (7.25)$$

zerują się następujące składniki macierzy sztywności (7.18):

$$\bar{Q}_{16} = 0 \quad \text{i} \quad \bar{Q}_{26} = 0. \quad (7.26)$$

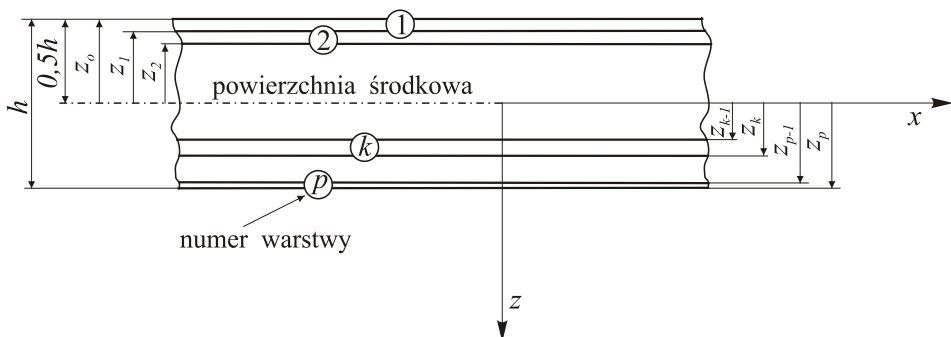
7.5. Makroskopowe właściwości mechaniczne kompozytów wielowarstwowych

Cienkościenne konstrukcje kompozytowe takie jak belki, płyty i powłoki znajdują coraz szersze zastosowanie we współczesnych konstrukcjach inżynierskich. W materiałach kompozytowych stosuje się wiele warstw zorientowanych pod różnymi kątami θ , tak aby poprawić charakterystykę rozpatrywanej konstrukcji.

Przedstawione powyżej związki fizyczne dotyczyły jedynie pojedynczej warstwy laminatu (tzw. laminy). Stanowi to punkt wyjścia do makroskopowego opisu właściwości mechanicznych laminatu składającego się z wielu warstw.

Rozpatrzono kompozyt wielowarstwowy (tzw. laminat) składający się z p -warstw pokazanych na rys. 7.5. Każda z warstw może mieć różną orientację włókien θ w globalnym układzie $x - y$ oraz różną grubość.

Rozpatrzmy k -tą warstwę laminatu. Związki fizyczne dla głównych kierunków materiałowych (tzn. w lokalnym układzie współrzędnych) k -tej ortotropowej warstwy w płaskim stanie naprężenia mają postać analogiczną do zależności (7.10), zaś w globalnym układzie współrzędnych wyrażają się wzorami (7.18).



Rys. 7.5. Geometria k -tej warstwy laminatu

Zależność (7.18) dla k -tej warstwy można zapisać jako:

$$\{\sigma\}_k = [\bar{Q}]_k \{\varepsilon\}_k \quad (7.27)$$

Wykorzystując klasyczną teorię cienkich płyt, odkształcenia k -tej warstwy mogą być wyrażone poprzez odkształcenia i krzywizny powierzchni środkowej laminatu dla $z = 0$, zgodnie z (7.4), w postaci:

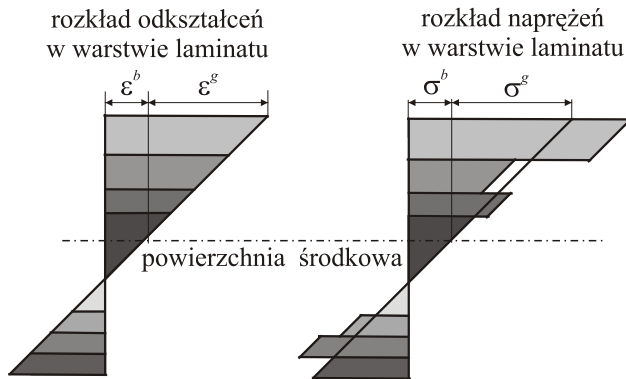
$$\{\varepsilon\}_k = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^b \\ \varepsilon_y^b \\ \gamma_{xy}^b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^g \\ \varepsilon_y^g \\ \gamma_{xy}^g \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^b \\ \varepsilon_y^b \\ \gamma_{xy}^b \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \{\varepsilon^b\} + z\{\kappa\}, \quad (7.28)$$

gdzie: ε^b są względnymi odkształceniami błonowymi powierzchni środkowej, zaś κ reprezentuje zmianę krzywizn zginania i skręcania powierzchni środkowej.

Uwzględniając powyższe w (7.27) naprężenia w k -tej warstwie wynoszą

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left\{ \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^b \\ \varepsilon_y^b \\ \gamma_{xy}^b \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right\}. \quad (7.29)$$

Ponieważ $(\bar{Q}_{ij})_k$ mogą być różne dla każdej warstwy laminatu, to podczas gdy odkształcenia laminatu po grubości zmieniają się liniowo, naprężenia mogą nie być ciągłe. Typowe rozkłady naprężeń i odkształceń po grubości laminatu przedstawiono na rys. 7.6.



Rys. 7.6. Przykładowa zmiana odkształceń i naprężeń po grubości laminatu

Obciążenia przyłożone do konstrukcji wykonanej z materiału kompozytowego wywołują w niej zmienne naprężenia i odkształcenia opisane w globalnym układzie współrzędnych. Kryteria zniszczenia kompozytu dotyczą naprężeń lub odkształceń w każdej warstwie indywidualnej w lokalnym układzie współrzęd-

nych (bardziej szczegółowe omówienie kryteriów zniszczenia przedstawiono w podrozdziale 6.6). Zależności transformacyjne umożliwiają przejście od jednego układu współrzędnych do drugiego.

Aby wyznaczyć wypadkowe siły i momenty przekrojowe działające w kompozycie, należy naprężenia w k -tej warstwie scałkować po grubości tej warstwy, a następnie zsumować po wszystkich p warstwach laminatu, czyli:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \{ N \} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz = \sum_{k=1}^p \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz \quad (7.30)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \{ M \} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k z dz = \sum_{k=1}^p \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k z dz \quad (7.31)$$

gdzie z_k i z_{k-1} są zdefiniowane na rys. 7.5. Należy zauważyć, że $z_0 = -h/2$.

Wobec zależności (2.28), czyli $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, dla płyt prostokątnych mamy

$$N_{xy} = N_{yx}, \quad M_{xy} = M_{yx}.$$

Podstawiając zależność (7.29) do (7.30) i (7.31) oraz zakładając, że współczynniki macierzy sztywności każdej warstwy są stałe dla danej warstwy, ostatecznie otrzymano równania konstytutywne dla laminatu w postaci:

$$\begin{Bmatrix} \{ N \} \\ \{ M \} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{ \varepsilon^b \} \\ \{ \kappa \} \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} \{ \varepsilon^b \} \\ \{ \kappa \} \end{Bmatrix} \quad (7.32)$$

gdzie:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^p (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \quad (7.33)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (7.34)$$

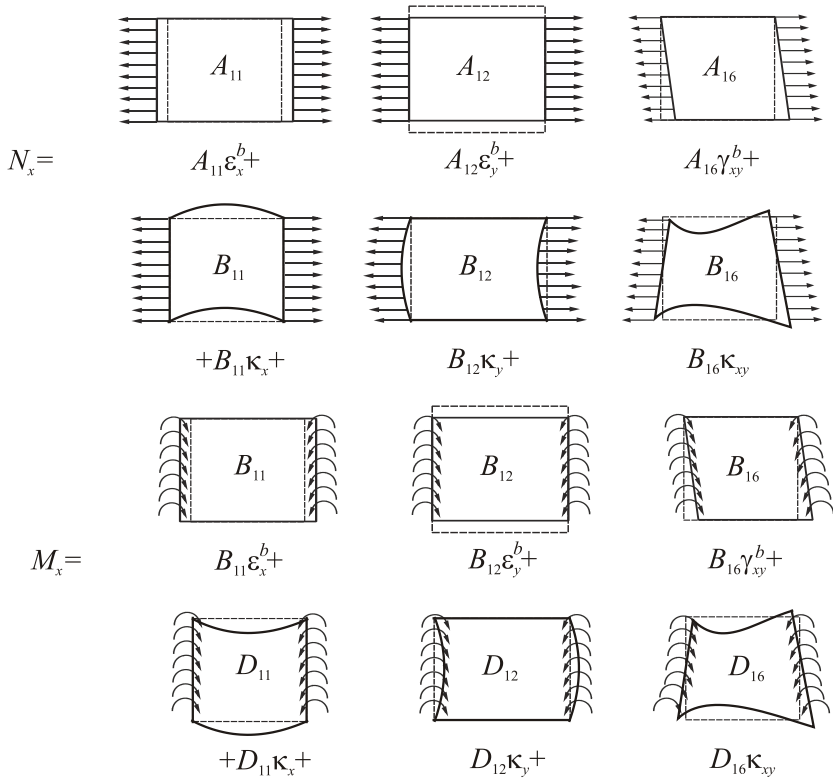
$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^p (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (7.35)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \quad (7.36)$$

oraz ponadto $A_{ij} = A_{ji}$, $B_{ij} = B_{ji}$, $D_{ij} = D_{ji}$ i $K_{ij} = K_{ji}$.

W macierzy $[K]$ (7.32) lub (7.36), podmacierz $[A]$, określona zależnością (7.33), związana z odpowiedzią w płaszczyźnie kompozytu jest nazywana *sztywnością rozciągania* (wzdłużną lub tarczową). Podmacierz $[D]$, wyrażona równaniem (7.35), odpowiadająca zginaniu laminatu z płaszczyzny środkowej nosi nazwę *sztywności giętej*. Podmacierz $[B]$, opisana wzorem (7.34), spowodowana jest istnieniem sprzężenia pomiędzy siłami $\{N\}$ i momentami $\{M\}$ (7.32) lub pomiędzy odkształceniami $\{\varepsilon^b\}$ i krzywiznami $\{\kappa\}$, nosi nazwę *sztywności sprzężenia* (lub interakcji).



Rys. 7.7. Wpływ poszczególnych elementów macierzy sztywności i odpowiadających im odkształceń na wewnętrzne siły przekrojowe płyty kompozytowej.

Na rys. 7.7 przedstawiono efekty wpływu składowych stanu odkształcenia płyty kompozytowej, z wyróżnieniem poszczególnych składników opisujących odkształcenia i odpowiednich elementów macierzy $[K]$, na wewnętrzne siły przekrojowe N_x i M_x płyty kompozytowej.

I tak na przykład, siła rozciągająca N_x zgodnie z (7.32) jest efektem: wydłużenia w kierunku x (element macierzy sztywności A_{11}), zwężenia w kierunku y (A_{12}), ścinania w płaszczyźnie x - y (A_{16}), zginania w kierunku x (B_{11}), zginania w kierunku y (B_{12}) i efektu giętno-skrętnego (B_{16}). Natomiast moment zginający M_x : wydłużenia w kierunku x (B_{11}), zwężenia w kierunku y (B_{12}), ścinania w płaszczyźnie x - y (B_{16}), zginania w kierunku x (D_{11}) i w kierunku y (D_{12}) oraz efektu giętno-skrętnego (D_{16}).

Zależność odwrotną do (7.32) można zapisać:

$$\begin{Bmatrix} \{\varepsilon^b\} \\ \{\kappa\} \end{Bmatrix} = [K]^{-1} \begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = [k] \begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} \quad (7.37)$$

gdzie wprowadzono następujące oznaczenie:

$$[k] = [K]^{-1} \quad (7.38)$$

7.6. Oznaczenia konfiguracji laminatów

Asymetryczny laminat jest najbardziej ogólnym przypadkiem kompozytu. W celu identyfikacji ułożenia włókien pod kątem θ w poszczególnych warstwach kompozytu wprowadza się następujące oznaczenia konfiguracji tych warstw. Przy czym grubości warstw mogą być różne.

Oznaczenia konfiguracji podajemy zgodnie ze zwrotem osi z poczynając od $z_0 = -h/2$ do $z_p = +h/2$, czyli od dołu laminatu (rys. 7.5). Indeks literowy: T oznacza pełną (totalną) informację o orientacji wszystkich warstw laminatu, zaś S oznacza symetryczne ułożenie warstw.

Ponadto wprowadza się także dolny indeks liczbowy oznaczający liczbę identycznych kolejnych warstw. Przykładowe oznaczenie $[0_3/90_2/45]_T$ – 3 warstwy o orientacji 0° , 2 o orientacji 90° i 1 o kącie 45° .

Kompozyty symetryczne mają symetryczne katowe ułożenie względem powierzchni środkowej. Stąd w przypadku laminatu symetrycznego następujące oznaczenia są identyczne: $[0_3/90_2/45/-45_3/-45_3/45/90_2/0_3]_T$ lub $[0_3/90_2/45/-45_6/45/90_2/0_3]_T$ lub $[0_3/90_2/45/-45_3]_S$.

7.7. Szczególne przypadki laminatów

Poniżej omówiono szczególne przypadki ułożenia laminatów, dla których sztywności przyjmują prostszą postać w stosunku do ogólnej postaci (7.36).

Założone związki konstytutywne (7.32) są bardzo ogólne i pozwalają analizować zachowanie się dowolnego laminatu. Zależności (7.32) ulegają znaczne-

mu uproszczeniu dla szczególnych przypadków konfiguracji warstw. W przypadku kompozytów symetrycznych, w których zarówno właściwości materiałowe, jak i geometryczne są symetryczne względem powierzchni środkowej (tzn. dwie warstwy poszczególnych par są jednakowej grubości, orientacji i mają takie same właściwości materiałowe) wzory (7.32) znacznie się upraszczają.

W tym przypadku macierze sztywności $(\bar{Q}_{ij})_k$ poszczególnych warstw i ich grubości są symetryczne względem powierzchni środkowej, a zatem na podstawie zależności (7.34) wszystkie sztywności $B_{ij} = 0$.

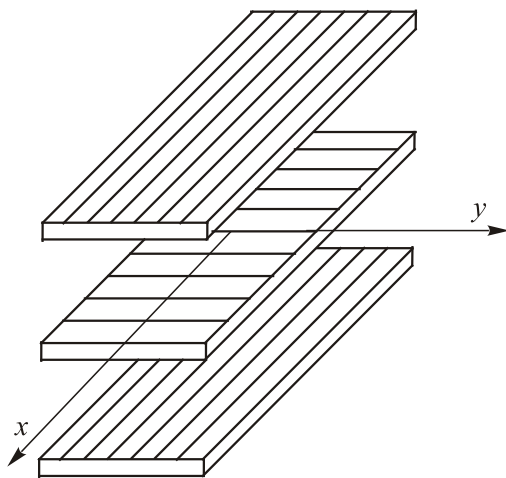
W przypadku laminatu symetrycznego o ułożeniu włókien określonym zależnością (7.26) kątem $\pm\theta_0$ następujące elementy macierzy sztywności są równe zero:

$$B_{ij} = A_{16} = A_{61} = A_{26} = A_{62} = D_{16} = D_{61} = D_{26} = D_{62} = 0 \quad (7.39)$$

W *laminatach regularnych* przyjmuje się jednakową grubość wszystkich warstw.

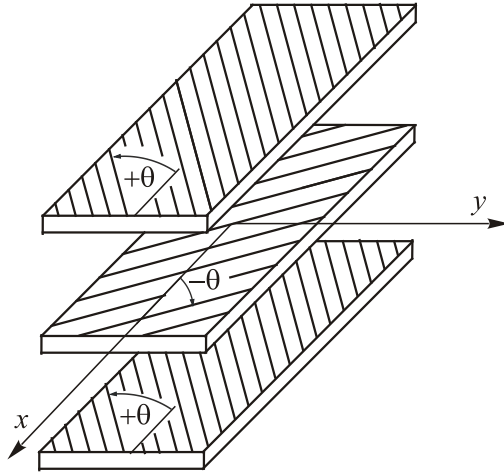
7.7.1. Regularne laminaty symetryczne

Eliminacja wszystkich sztywności sprężenia B_{ij} ma istotne znaczenie ze względów praktycznych oraz umożliwia łatwiejszą analizę teoretyczną. Laminaty symetryczne nie mają tendencji do skręcenia wywołanego skurczem chłodzenia w czasie klejenia poszczególnych warstw. Z powyższych względów, w praktyce inżynierskiej kompozyty symetryczne znajdują szersze zastosowanie niż niesymetryczne.



Rys. 7.8. Regularnie symetryczny trójwarstwowy laminat typu krzyżowego

Specjalnym przypadkiem kompozytu symetrycznego jest *regularnie symetryczny laminat typu krzyżowego* (*cross-ply, ang.*) pokazany na rys. 7.8. Laminat zbudowany jest z warstw o kierunkach orientacji obróconych o 0° lub 90° w stosunku do osi laminatu (np. $[0/90/0]_T$), w których wszystkie warstwy mają takie same właściwości materiałowe i mają taką samą grubość. Dla takiego kompozytu znikają sztywności (7.39) (tzn. $B_{ij} = A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = 0$). Laminat taki nazywamy quasi-ortotropowym materiałem.



Rys. 7.9. Regularnie symetryczny trójwarstwowy laminat typu kąтового

Powszechnym rodzajem kompozytu jest *regularny symetryczny laminat typu kąтового* (*angle-ply, ang.*) pokazany na rys. 7.9. Sąsiadujące warstwy takiego kompozytu mają przeciwne znaki orientacji kątowej zawarte pomiędzy lokalnymi układami współrzędnych, a globalnym układem współrzędnych (osiąmi laminatu). Na przykład $[+\theta/-\theta/+\theta]_T$. W przypadku symetrii liczba warstw w takim kompozycie musi być nieparzysta. Dla wielowarstwowych symetrycznych laminatów typu kąтового wartości sztywności A_{16} , A_{26} , D_{16} i D_{26} mogą być całkiem małe w porównaniu z pozostałymi, odpowiednio, sztywnościami A_{ij} i D_{ij} ponieważ $(\bar{Q}_{16})_{+\theta} = -(\bar{Q}_{16})_{-\theta}$ i $(\bar{Q}_{26})_{+\theta} = -(\bar{Q}_{26})_{-\theta}$. Mogą być pominięte w analizie, gdy sztywności A_{16} , A_{26} , D_{16} i D_{26} są dokładnie równe zero.

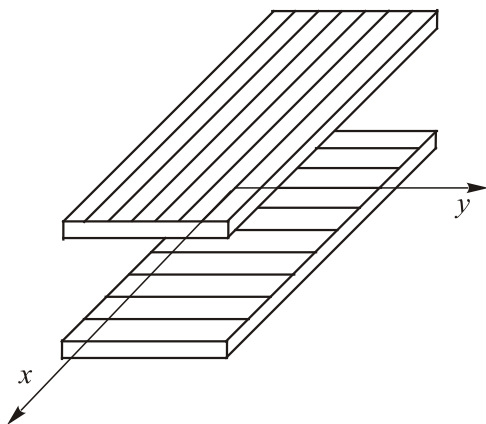
7.7.2. Regularne laminaty antysymetryczne

Często w kompozytach symetrycznych ważne jest pominięcie sprzężenia pomiędzy stanem błonowym i zgięciowym. Jednak w wielu zastosowaniach kompozytów warstwowych znajdują uznanie projektantów i użytkowników laminaty antysymetryczne, które zapewniają większą sztywność ścinania niż la-

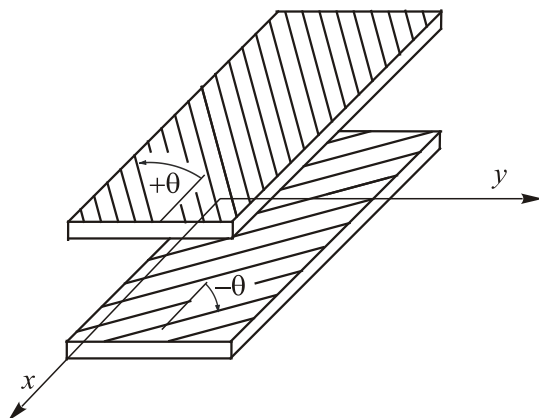
minaty symetryczne. Laminaty antysymetryczne muszą mieć parzystą liczbę warstw, np. $[+\theta/-\theta/+\theta/-\theta]_T$.

Regularne antysymetryczne laminaty typu krzyżowego (cross-ply, ang.), zbudowane z parzystej liczby warstw mających jednakową grubość i takie same właściwości materiałowe a warstwy są obrócone o 0° lub 90° w stosunku do osi laminatu, pokazano na rys. 7.10. Takie laminaty mają sztywności A_{16} , A_{26} , D_{16} , D_{26} , B_{12} , B_{16} , B_{26} i B_{66} równe zero. Istnieje sprzężenie pomiędzy stanem błonowym i zgięciowym poprzez $B_{11} = -B_{22} \neq 0$. W przypadku, gdy przy ustalonej grubości płyty rośnie liczba warstw tzn. $p \rightarrow \infty$, to $B_{11} \rightarrow 0$.

Regularne antysymetryczne laminaty typu kąтового (angle-ply, ang.) o parzystej liczbie warstw mają przeciwne znaki kątowej orientacji sąsiadujących warstw, na przykład $[+\theta/-\theta]_T$ (rys. 7.11). W takim laminacie $A_{16} = A_{26} = B_{11} = B_{12} = B_{22} = B_{66} = D_{16} = D_{26} = 0$, czyli tylko $B_{16} \neq 0$ i $B_{26} \neq 0$.



Rys. 7.10. Regularnie antysymetryczny dwuwarstwowy laminat typu krzyżowego



Rys. 7.11. Regularnie antysymetryczny dwuwarstwowy laminat typu kąтового

Tablica 7.1. Macierz sztywności dla regularnie symetrycznych i antysymetrycznych laminatów

<p><u>regularnie symetryczny laminat typu krzyżowego (cross-ply, ang.)</u></p> $[K] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}$	<p><u>regularnie antysymetryczny laminat typu krzyżowego (cross-ply, ang.)</u></p> $[K] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & -B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ B_{11} & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & -B_{11} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}$
<p><u>regularnie symetryczny laminat typu kątownego (angle-ply, ang.)</u></p> $[K] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}$	<p><u>regularnie antysymetryczny laminat typu kątownego (angle-ply, ang.)</u></p> $[K] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & B_{26} \\ 0 & 0 & A_{66} & B_{16} & B_{26} & 0 \\ 0 & 0 & B_{16} & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & B_{26} & D_{12} & D_{22} & 0 \\ B_{16} & B_{26} & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}$
<p><u>laminat izotropowy</u></p> $[K] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}$	<p><u>regularnie antysymetryczny laminat typu krzyżowego</u> aproxymacja rozwiązania dla $p \rightarrow \infty$</p> $[K] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}$

W ortotropowych płytach i wielowarstwowych regularnych kompozytach symetrycznych nie ma sprzężenia pomiędzy wypadkowymi siłami i momentami przekrojowymi:

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [0] \\ [0] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^b\} \\ \{\kappa\} \end{Bmatrix} \quad (7.40)$$

7.8. Kryterium zniszczenia pierwszej warstwy

W teorii cienkościennych konstrukcji kompozytowych zakłada się płaski stan naprężenia. Natomiast dla materiałów kompozytowych o właściwościach anizotropowych, często modelowanych jako ortotropowe konieczne jest zastosowanie innych, odpowiednich dla takich materiałów hipotez wyężeniowych (szczegółowe omówienie w podrozdziale 6.6). We wszystkich kryteriach materiał warstwy indywidualnej (laminy) traktowany jest makroskopowo jako jednorodny i nie bierze się pod uwagę mechanizmów zniszczenia w skali mikroskopowej.

Materiały kompozytowe charakteryzują się różnymi właściwościami wytrzymałościowymi w głównych kierunkach materiałowych (ortotropii) na rozciąganie i na ściskanie oraz na ścinanie. Kryteria zniszczenia formułowane są dla k -tej warstwy indywidualnej w lokalnym układzie współrzędnych 1–2 (rys. 7.5).

Zastosowanie kryterium maksymalnych naprężeń lub kryterium interakcyjnego wymusza przetransformowanie składowych stanu naprężenia z globalnego $x-y$ do lokalnego układu współrzędnych (6.65), czyli na naprężenia $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12})$ związane z głównymi osiami materiału danej warstwy. Natomiast w przypadku kryterium maksymalnych odkształceń należy dokonać analogicznej transformacji odkształceń względnych (6.68).

W omówionych powyżej trzech kryteriach przyjmuje się, że gdy choćby jedna z warstw ulegnie zniszczeniu, to cały kompozyt ulega zniszczeniu. Dlatego też kryteria te często noszą wspólną nazwę kryterium zniszczenia pierwszej warstwy z wszystkich warstw. W omawianych kryteriach nie uwzględnia się zjawiska delaminacji kompozytu.

7.9. Różniczkowe równania równowagi cienkich prostokątnych płyt kompozytowych

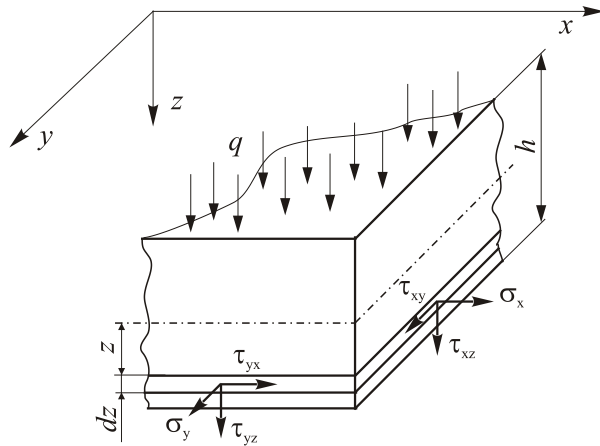
W celu sformułowania równań równowagi płyty, rozpatrzono nieskończenie mały prostopadłościenny element płytowy o wysokości h i o wymiarach podstawy dx i dy odpowiednio w kierunkach osi x , y . Na rys. 7.12 przedstawiono układ wewnętrznych sił działających na poszczególnych ścianach prostopadłościanu. Zakładamy, że obciążenie działające prostopadle do powierzchni środkowej płyty w kierunku osi z jest ciągłe i działa na powierzchni o współ-

rzędnej $z = -h/2$. Obciążenie na jednostkę powierzchni będące intensywnością obciążenia zewnętrznego (np. ciśnienie) ma wartość $q(x, y)$. Na powierzchniach zewnętrznych płyty obowiązują warunki brzegowe:

$$\text{dla } z = -h/2 \quad \sigma_z = -q(x, y) \quad \tau_{xz} = 0 \quad \tau_{yz} = 0 \quad (7.41)$$

$$\text{dla } z = h/2 \quad \sigma_z = 0 \quad \tau_{xz} = 0 \quad \tau_{yz} = 0$$

Jak stąd widać, wewnątrz płyty naprężenia σ_z zmieniają się od $-q(x, y)$ do zera. Zatem bezwzględna wartość maksymalna σ_z nie przekracza wartości q i jest mała w porównaniu ze składowymi stanu naprężenia $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}$. Z tych względów w teorii cienkich płyt pomija się naprężenia σ_z (czyli przyjmuje się $\sigma_z \approx 0$) oraz wpływ tych naprężeń na odkształcenia.



Rys. 7.12. *Naprężenia składowe w płaszczyźnie płyty*

Na rys. 7.12 przedstawiono również naprężenia styczne τ_{xz} i τ_{yz} . Naprężenia te przyjmują małe wartości w porównaniu do pozostałych rozpatrywanych składowych stanu naprężenia $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$. Musimy je jednak uwzględnić, aby element prostopadłościenny znajdował się w równowadze.

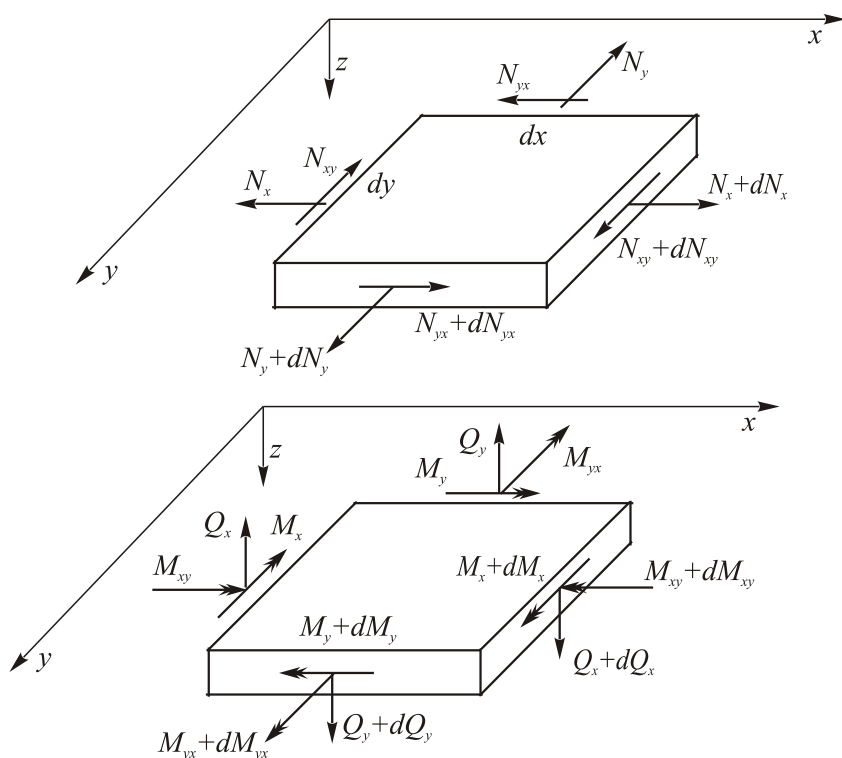
Podobnie jak w wytrzymałości materiałów założono, że naprężenia τ_{xz} i τ_{yz} mają rozkład paraboliczny wzdłuż grubości płyty. Zgodnie z warunkami brzegowymi (7.41) naprężenia styczne są równe zero na powierzchniach $z = \pm h/2$ i osiągają wartości maksymalne na powierzchni środkowej płyty (tzn. obowiązuje wzór Żurawskiego [9,28,30,38]).

W teorii płyt przyjmuje się, że siły wewnętrzne są wypadkowymi naprężeniami na całej grubości płyty odniesionymi do jednostki długości przekroju poprzecz-

nego. Składowe sił poprzecznych są wypadkowymi następujących składowych stanu naprężenia:

$$Q_x dy = dy \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz \quad Q_y dx = dx \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz \quad (7.42)$$

W równaniach (7.42) wprowadzono wymiar długości przekroju w odpowiednim kierunku, aby równania te miały wymiar sił.



Rys. 7.13. Siły wewnętrzne w płaszczyźnie środkowej płyty

Obciążenie zewnętrzne może powodować zmianę składowych sił wewnętrznych na odpowiednich ściankach rozpatrywanego prostopadłościanu $h dx dy$. Przechodząc od przekroju $x = \text{const}$ do przekroju $x + dx = \text{const}$ oraz od $y = \text{const}$ do $y + dy = \text{const}$ składowe siły wewnętrznych ulegają niewielkim zmianom jako funkcje położenia. Przyrosty składowych sił wewnętrznych zredukowane do powierzchni środkowej (rys. 7.13) rozwijamy w szereg Taylora i ograniczając się jedynie do członów liniowych otrzymano następujące zależności:

$$\begin{aligned}
N_x + dN_x &= N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \\
N_y + dN_y &= N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y} dy \\
N_{xy} + dN_{xy} &= N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx \\
N_{yx} + dN_{yx} &= N_{yx} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} dy \\
M_x + dM_x &= M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \\
M_y + dM_y &= M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy \\
M_{xy} + dM_{xy} &= M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx \\
M_{yx} + dM_{yx} &= M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy \\
Q_x + dQ_x &= Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \\
Q_y + dQ_y &= Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy
\end{aligned} \tag{7.43}$$

Ułożmy warunek równowagi momentów względem osi przechodzącej przez środek ciężkości rozpatrywanego elementu i równoległej do osi y (rys. 7.13):

$$\begin{aligned}
&(M_x + dM_x)dy - M_x dy + (M_{yx} + dM_{yx})dx + \\
&- M_{yx}dx - (Q_x + dQ_x)dy \frac{dx}{2} - Q_x dy \frac{dx}{2} = 0
\end{aligned} \tag{7.44}$$

Po wprowadzeniu do powyższego równania zależności (7.43) i po podzieleniu przez pole powierzchni $dx dy$ mamy następujące równanie:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x - \frac{1}{2} \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx = 0 \tag{7.45}$$

Ostatni składnik w powyższej zależności jest wielkością o rząd mniejszą od pozostałych, zatem po jego pominięciu ostatecznie otrzymano:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (7.46)$$

Analogicznie układając równanie momentów względem osi przechodzącej przez środek ciężkości elementu i równoległej do osi x uzyskano równanie:

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0 \quad (7.47)$$

Zależności (7.46) i (7.47) pozwalają wyrazić siły poprzeczne Q_x, Q_y poprzez pochodne cząstkowe momentów wewnętrznych. Zapisując równanie równowagi sił działających na element $h dx dy$ w kierunku osi z otrzymano:

$$(Q_x + dQ_x)dy - Q_x dy + (Q_y + dQ_y)dx - Q_y dx + q dx dy = 0 \quad (7.48)$$

Wstawiając do ostatniego równania zależności (7.46) i (7.47) mamy związek pomiędzy intensywnością obciążenia zewnętrznego q , a pochodnymi momentów wewnętrznych:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = 0 \quad (7.49)$$

gdzie uwzględniono zależność $M_{xy} = M_{yx}$.

Zapiszmy sumy rzutów sił działających na element $dx dy$, odpowiednio, w kierunkach osi x i y :

$$(N_x + dN_x)dy - N_x dy + (N_{yx} + dN_{yx})dx - N_{yx} dx = 0 \quad (7.50)$$

$$(N_y + dN_y)dx - N_y dx + (N_{xy} + dN_{xy})dy - N_{xy} dy = 0$$

Po uwzględnieniu w powyższych zależnościach (7.43) otrzymano następujące równania:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (7.51)$$

gdzie wykorzystano zależność $N_{xy} = N_{yx}$.

Ostatecznie zgodnie z (7.49) i (7.51) układ różniczkowych równań równowagi ma postać:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (7.52)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = 0$$

W ogólnym przypadku powyższy układ równań jest sprzężony poprzez związki (7.32). A zatem składowe sił wewnętrznych w płaszczyźnie płyty N_x, N_y, N_{xy} są sprzężone z momentami wewnętrznymi M_x, M_y, M_{xy} . Reakcja w powierzchni środkowej może być wywołana, na przykład, efektem sprzężenia B_{ij} (7.34) dla niesymetrycznych płyt kompozytowych.

Uwzględniając związki konstytutywne (7.32) oraz związki fizyczne (7.4) w równaniach równowagi otrzymano układ różniczkowych równań dla prostokątnych płyt kompozytowych o dowolnej budowie warstw składowych:

$$\begin{aligned} & A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\ & - 3B_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \\ & A_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - B_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\ & - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \\ & D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \\ & - B_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - B_{16} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \\ & - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - q = 0 \end{aligned} \quad (7.53)$$

Jest to układ trzech sprzężonych równań różniczkowych względem przemieszczeń u, v, w .

W przypadku płyty o budowie symetrycznej względem powierzchni środkowej mamy $B_{ij} = 0$ (patrz p. 7.7). W takim przypadku dwa pierwsze równania równowagi, czyli sił działających w powierzchni środkowej są niezależne od trzeciego z równań równowagi (7.52) lub (7.53). W przypadku takich płyt na ogół można pominąć wpływ sił N_x, N_y, N_{xy} , czyli założyć

$$N_x = N_y = N_{xy} = 0 \quad (7.54)$$

Tablica 7.2. Płyta kompozytowa o budowie symetrycznej

Wielowarstwowa płyta o budowie symetrycznej		
1. Przypadek ogólny tzn. $B_{ij} = 0$ i $D_{ij} \neq 0$ dla $i, j = 1, 2, 6$		
$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - q = 0$		
2. Płyta quasi-ortotropowa tzn. $B_{ij} = 0$ i $D_{16} = D_{26} = 0$		
$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - q = 0$		
3. Płyta izotropowa tzn. $D_{11} = D_{22} = D_{12} + D_{66}$		
$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - q = 0$		
4. Warunki brzegowe:		
	$x = const$	$y = const$
brzeg swobodny	$M_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0$	$M_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} = 0$
brzeg przegubowo podparty	$w = M_x = 0$	$w = M_y = 0$
brzeg utwierdzony	$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0$	$w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0$
5. Momenty wewnętrzne i siły poprzeczne		
Przypadek ogólny		
$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$		
$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$		
$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$		
Quasi-ortotropia		
$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$		
$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$		
$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$		

W ogólnym przypadku symetrii płyt (np. regularnie symetryczny laminat typu kąтового) mamy wówczas jedno równanie równowagi:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - q = 0 \quad (7.55)$$

zaś w przypadku quasi-ortotropowej płyty (np. regularnie symetryczny laminat typu krzyżowego):

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - q = 0 \quad (7.56)$$

W tablicy 7.2 przedstawiono równania równowagi, warunki brzegowe i siły wewnętrzne dla płyt wykonanych z laminatów symetrycznych.

7.10. Warunki brzegowe

Warunki brzegowe pozwalają podać rozwiązanie układu różniczkowych równań równowagi płyty w sposób jednoznaczny. W ogólnym przypadku na jednostkę długości boku płyty (porównaj rys. 7.14) może być zadane obciążenie w postaci wektorów:

- siły normalnej,
- siły tnącej,
- momentu zginającego,
- momentu skręcającego,
- siły poprzecznej.

Ostatnie trzy warunki związane są z równaniem równowagi momentów (7.49) lub (7.52). Rozwiązanie tego równania dopuszcza możliwość spełnienia tylko dwóch warunków brzegowych na dwóch równoległych do siebie krawędziach płyty w kierunku osi x lub y ze względu na drugi rząd równania różniczkowego o pochodnych cząstkowych względem x i y . Na krawędzi płyty występują trzy wielkości – moment zginający, moment skręcający, siła poprzeczna. Wynika to z uproszczeń klasycznej teorii cienkich płyt tj. nie uwzględnieniu wpływu naprężeń tnących τ_{xz}, τ_{yz} na stan odkształcenia.

Aby otrzymać tylko dwa warunki brzegowe momenty skręcające zastąpiono równoważnym pod względem statycznym układem par sił poprzecznych.

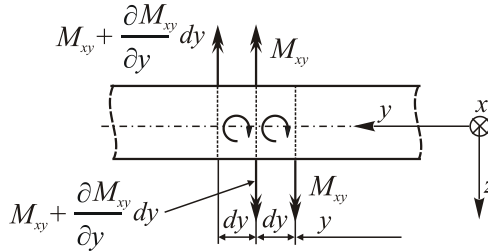
Rozważmy moment skręcający M_{xy} na poszczególnych odcinkach dy krawędzi płyty $x = \text{const}$ (rys. 7.14). Przyrost momentu skręcającego na każdym odcinku dy zastąpiony parą sił jest równy $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy$.

Odpowiada on kolejnym odcinkom dy brzegu $x = \text{const}$. Jeśli funkcję wzrostu momentu skręcającego podzielimy przez dy w celu otrzymania siły na jednostkę długości, to otrzymujemy siłę poprzeczną $\partial M_{xy} / \partial y$. W ten sposób moment skręcający M_{xy} zastąpiono pionową zastępczą siłą poprzeczną o intensywności $\partial M_{xy} / \partial y$. Zastępczą siłą poprzeczną Kirchhoffa zdefiniowano jako sumę sił poprzecznych Q_x (rys. 7.13) i $\partial M_{xy} / \partial y$ (rys. 7.14), czyli:

$$V_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (7.57)$$

zaś zgodnie z (7.46)

$$V_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (7.58)$$



Rys. 7.14. Rozkład momentu skręcającego M_{xy} na brzegu $x = \text{const}$

Zastępcza siła poprzeczna jest statycznie równoważna rzeczywistemu układowi sił i zgodnie z zasadą de Saint-Venanta dotyczy jedynie wąskiej strefy brzegowej na odległości równej rzędowi grubości płyty. Siła V_x (7.58) musi być równa reakcji podporowej na podpartych brzegach płyty lub równa zero dla brzegu swobodnego.

Analogicznie wyznacza się zastępczą siłę poprzeczną Kirchhoffa na brzegu $y = \text{const}$:

$$V_y = Q_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} = \frac{\partial M_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \quad (7.59)$$

Takie podejście pozwala sformułować następujące warunki brzegowe na poszczególnych brzegach płyty:

- $x = \text{const}$

$$N_x = 0 \quad \text{lub} \quad u = 0$$

$$N_{xy} = 0 \quad \text{lub} \quad v = 0$$

$$M_x = 0 \quad \text{lub} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (7.60)$$

$$V_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \text{lub} \quad w = 0$$

- $y = \text{const}$

$$N_y = 0 \quad \text{lub} \quad v = 0$$

$$N_{xy} = 0 \quad \text{lub} \quad u = 0$$

$$M_y = 0 \quad \text{lub} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (7.61)$$

$$V_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} = 0 \quad \text{lub} \quad w = 0$$

- naroże płyty prostokątnej tzn. $x = \text{const}$ i $y = \text{const}$

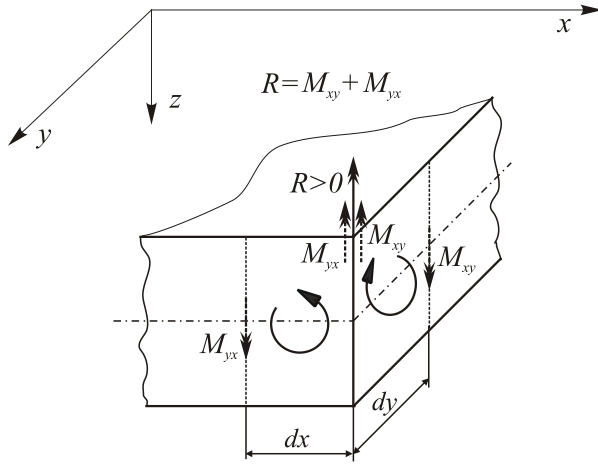
$$M_{xy} = 0 \quad \text{lub} \quad w = 0 \quad (7.62)$$

Pod względem formalizmu matematycznego można, na przykład, sformułować dwa następujące warunki dla $x = \text{const}$: $M_x = 0$ i $w = 0$, zaś błędne są, na przykład, następujące warunki: $M_x = 0$ i $\partial w / \partial x = 0$.

Podobnie jak dla belek w wytrzymałości materiałów, w teorii cienkich płyt wyróżniamy trzy podstawowe warunki brzegowe, czyli trzy sposoby podparcia każdego z brzegów płyty, które podano w Tablicy 7.3.

Tablica 7.3. Podstawowe warunki brzegowe dla płyt kompozytowych

Podstawowe warunki brzegowe		
	$x = \text{const}$	$y = \text{const}$
brzeg swobodny	$N_x = N_{xy} = M_x =$ $= \frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0$	$N_y = N_{xy} = M_y =$ $= \frac{\partial M_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} = 0$
brzeg przegubowo podparty	$N_x = N_{xy} = w = M_x = 0$	$N_y = N_{xy} = w = M_y = 0$
brzeg utwierdzony	$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0$	$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0$



Rys. 7.15. Siła skupiona w narożu płyty

Należy jeszcze określić siły w narożu płyty. W takim przypadku na zbiegających się krawędziach płyty występuje nieciągłość działających momentów skręcających (rys. 7.15). Jeśli momenty skręcające M_{xy} i M_{yx} , których zwroty w sąsiedztwie naroża są przeciwne, zastąpimy parami sił, to w narożu powstają zastępcze siły skupione. W narożu działa siła skupiona:

$$R = M_{xy} + M_{yx} \quad (7.63)$$

Dla płyty prostokątnej, czyli gdy naroże tworzy kąt prosty i brzegi są prostoliniowe, to wobec równości $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ i $M_{xy} = M_{yx}$ otrzymujemy

$$R = 2M_{xy} \quad (7.64)$$

Reakcja R może być dodatnia lub ujemna. Jeśli siła ma wartość dodatnią, to dąży do podniesienia się naroża płyty i należy wtedy naroże zakotwiczyć. Jeśli brzegi płyty przylegające do naroża są utwierdzone, to muszą wzdłuż nich zniknąć momenty skręcające, wobec tego w narożu nie występuje żadna reakcja. W narożu swobodnym znika moment zginający i zastępuje siłą poprzeczną Kirchhoffa wzdłuż swobodnego brzegu, a zatem powinien być spełniony warunek $R = 2M_{xy} = 0$.

7.11. Element belkowy

Przedstawione dla płyt kompozytowych zależności znacznie upraszczają się dla elementu belkowego jednowymiarowego w kierunku x , przy czym kierunek ten nie musi pokrywać się z kierunkiem ułożenia włókien, czyli głównym kie-

runkiem ortotropii. Równania teorii cienkich płyt upraszczają się znacznie w tym przypadku. Podstawowe zależności przedstawiono w Tablicy 7.4. Należy zwrócić uwagę, że siły wewnętrzne N_x , M_x , Q_x w teorii płyt są odniesione do szerokości płyty. Analogicznie sztywność A_{11} , B_{11} , D_{11} . W przypadku belki o szerokości b i grubości h wewnętrzne siły oraz sztywność można wyrazić następująco:

$$\begin{aligned}\bar{N}_x &= N_x b & \bar{M}_x &= M_x b & \bar{Q}_x &= Q_x b \\ \bar{A}_{11} &= A_{11} b & \bar{B}_{11} &= B_{11} b & \bar{D}_{11} &= D_{11} b\end{aligned}\quad (7.65)$$

W przypadku belki obciążonej tylko siłą osiową \bar{N} [N] z tablicy 7.4 widać, że:

$$\begin{aligned}\bar{N}_x &= N_x b = [A_{11}\varepsilon_x^b + B_{11}\kappa_x] \cdot b \neq 0 \\ \bar{M}_x &= M_x b = [B_{11}\varepsilon_x^b + D_{11}\kappa_x] \cdot b = 0\end{aligned}\quad (7.66)$$

Z (7.66) wynika:

$$\begin{aligned}\kappa_x &= -\frac{B_{11}}{D_{11}}\varepsilon_1^b \\ \bar{N}_x &= N_x b = b\varepsilon_1^b \left(A_{11} - \frac{B_{11}^2}{D_{11}} \right) \quad [\text{N}]\end{aligned}\quad (7.67)$$

zaś w przypadku czystego zginania belki momentem gnącym \bar{M}_x [Nm] czyli dla przypadku: $M_x \neq 0$ i $N_x = 0$ mamy:

$$\begin{aligned}\bar{N}_x &= N_x b = [A_{11}\varepsilon_x^b + B_{11}\kappa_x] \cdot b = 0 \\ \bar{M}_x &= M_x b = [B_{11}\varepsilon_x^b + D_{11}\kappa_x] \cdot b \neq 0\end{aligned}\quad (7.68)$$

stąd wynikają zależności:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^b &= -\frac{B_{11}}{A_{11}}\kappa_x \\ \bar{M}_x &= M_x b = b\kappa_x \left(D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}} \right) \quad [\text{Nm}]\end{aligned}\quad (7.69)$$

Tablica 7.4. Belka kompozytowa

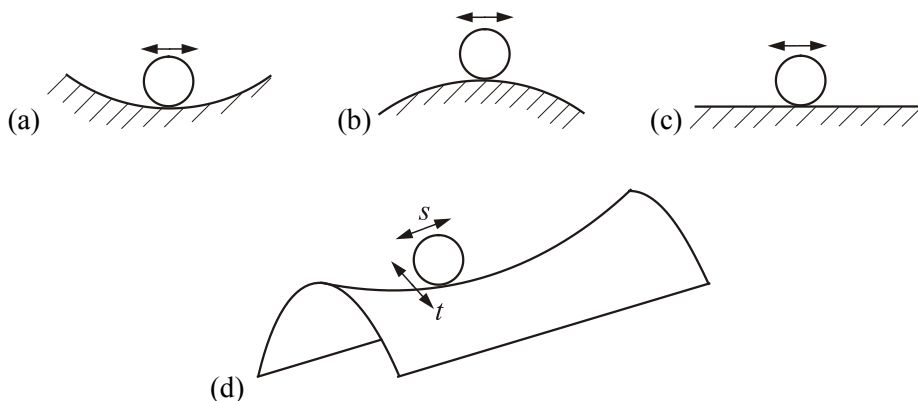
Wielowarstwowa belka	
Odształcenia i krzywizna belki	$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} + z\kappa_x, \quad \kappa_x = -\frac{d^2w}{dx^2}$
Naprężenia i siły wewnętrzne	$\sigma_x = \bar{Q}_{11}\varepsilon_x = \bar{Q}_{11}(\varepsilon_x^b + z\kappa_x)$ $N_x = A_{11}\varepsilon_x^b + B_{11}\kappa_x, \quad M_x = B_{11}\varepsilon_x^b + D_{11}\kappa_x$
Równania równowagi	$Q_x = \frac{dM_x}{dx}, \quad \frac{dN_x}{dx} = 0, \quad \frac{d^2M_x}{dx^2} = q$
Przypadek sprzężenia obciążenia poprzecznego q i obciążenia w powierzchni środkowej N_x :	
$\frac{d^2M_x}{dx^2} = q + N_x \frac{d^2w}{dx^2}$	
Warunki brzegowe dla $x = const$:	
<ul style="list-style-type: none"> • brzeg swobodny: $N_x = M_x = Q_x = 0$ • brzeg przegubowo podparty: $N_x = w = M_x = 0$ • brzeg utwierdzony: $u = w = \frac{dw}{dx} = 0$ 	

8. STATECZNOŚĆ CIENKOŚCIENNYCH PŁYT PROSTOKĄTNYCH

8.1. Statyczna stateczność konstrukcji cienkościennych

Stateczność równowagi sprężystego układu odkształcalnego można najogólniej zdefiniować w sensie dynamicznym jako szczególny przypadek stateczności ruchu ciała. Klasyczna definicja stateczności stanu równowagi ściśle związana jest z definicją Lapunowa. Według tej definicji ruch układu jest stateczny wtedy i tylko wtedy, jeśli niewielkie zakłócenie położenia i prędkości początkowej powoduje niewielkie zakłócenie położenia i prędkości w dowolnej chwili czasu t [9,19,22,30,38].

Stąd bezpośrednio wynika definicja statycznego kryterium stateczności. Można je sformułować następująco: Konfiguracja stanu równowagi układu jest stateczna wtedy i tylko wtedy, jeśli układ powróci do swojej wyjściowej konfiguracji po małym chwilowym zakłóceniu. Zakłócenie to może być wywołane przez przyłożenie do układu niewielkich sił w krótkim okresie czasu t , a następnie usunięcie tych sił.



Rys. 8.1. *Ilustracja stanów równowagi*

W przypadku, gdy konfiguracja stanu równowagi układu nie jest stateczna mówimy o utracie stateczności przez wyboczenie (tzw. dywergencję), co oznacza możliwość istnienia równowagi w położeniu sąsiednim.

Powyższą definicję można zilustrować na przykładzie ruchu sztywnej kulki po nieodkształcalnej powierzchni (rys. 8.1).

W przypadku „a” równowaga kulki jest stateczna, bo po małym zakłóceniu równowagi kulka wraca do położenia na dnie. W przypadku „b” równowaga jest niestateczna, albowiem po małym zakłóceniu kulka nie wróci do swojego położenia początkowego. W przypadku „c” po małym zakłóceniu kulka toczy się po płaszczyźnie poziomej i zajmuje nowe położenie równowagi różne od położenia początkowego. Zatem położenie jest niestateczne. Jednak ze względu na to, że oba te położenia kulki mogą być dowolnie blisko siebie mówimy o neutralnym stanie równowagi. W przypadku „d” równowaga w kierunku s jest stateczna, zaś w kierunku t – niestateczna. Przypadek ten jest niestateczny, ponieważ stateczność równowagi musi zachodzić dla dowolnie małych zakłóceń we wszystkich kierunkach.

W przypadku układu odkształcalnego rodzaj równowagi zależy najczęściej od wartości sił obciążających. Gdy wartość parametru obciążenia jest równa obciążeniu krytycznemu (czasami nazywana także bifurkacyjnemu), to niewielkie zakłócenie położenia równowagi powoduje przejście układu do nowego sąsiedniego położenia równowagi. Najczęściej podstawowa postać równowagi przestaje być stateczna, natomiast nowa postać równowagi może być stateczna lub niestateczna.

W analizie stateczności równowagi układów odkształcalnych należy uwzględnić wpływ zmian geometrii na rozkład sił wewnętrznych, czyli pominąć zasadę zeszytywnienia. Jest to ściśle związane z badaniem jednorodności rozwiązań układu [19,22,30,38].

Stateczność układów odkształcalnych o n stopniach swobody można teoretycznie opisać liniowym układem n równań różniczkowych. Wówczas zagadnienie jest problemem wartości własnych i pozwala jednoznacznie wyznaczyć wartości własne, czyli wartości krytyczne parametru obciążenia oraz wektory własne. Uniemożliwia określenie przemieszczeń, które określone są jedynie z dokładnością do stałej.

W zagadnieniach technicznych najmniejsza wartość własna określa ważną teoretyczną wartość obciążenia krytycznego.

Zjawisko utraty stateczności można też nazwać *wyboczeniem bifurkacyjnym w sensie matematycznym*.

Otrzymane w badaniach doświadczalnych wartości obciążeń powodujących wyboczenie konstrukcji są często niższe od wartości obciążeń teoretycznych dla układów idealnych. Te rozbieżności są typowe dla konstrukcji z niedokładnościami (tzw. imperfekcjami) jak np.: wstępna krzywizna, płyta niecałkowicie płaska, naprężenia wstępne, odchylenia we właściwościach materiałowych i wymiarach geometrycznych elementów konstrukcji, niedokładność w sposobie obciążenia itd.

Aby ocenić wpływ niedokładności na stan równowagi w teorii układów idealnych, w których następuje wyboczenie typu bifurkacyjnego, należy uwzględnić ustalone odpowiednio typy niedokładności (np. przepisami norma-

tywnymi) [19,21]. Także to podejście można zakwalifikować jako *wyoboczenie układów rzeczywistych w sensie matematycznym*.

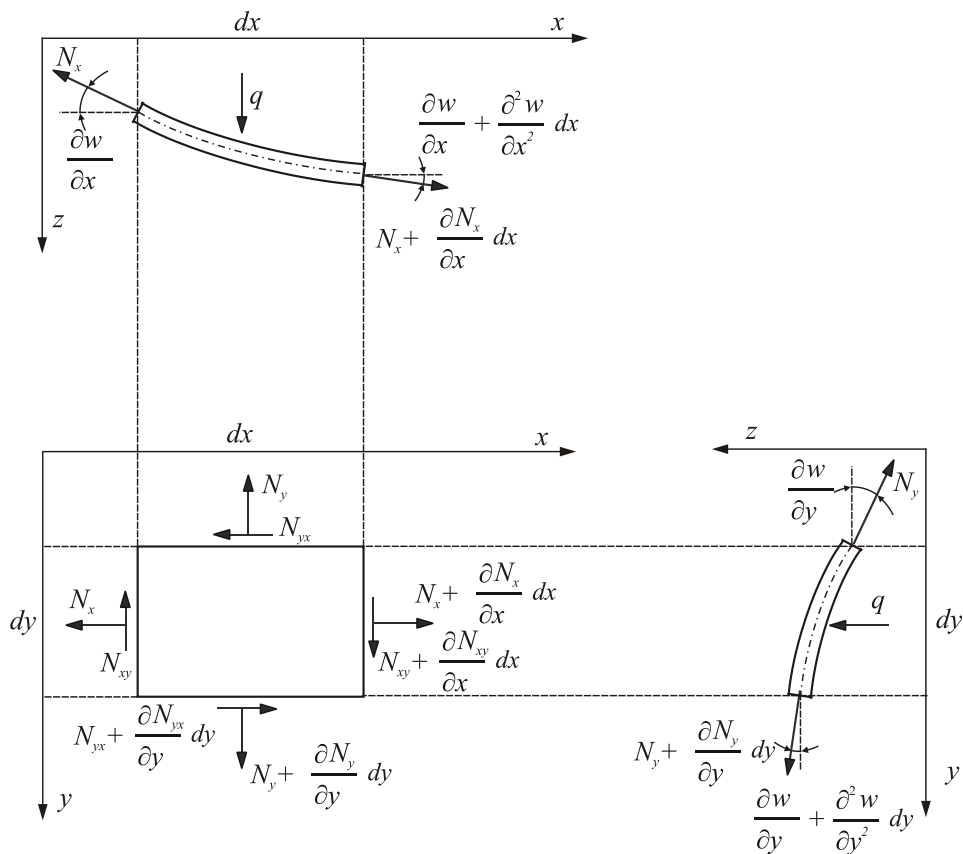
Należy zwrócić uwagę, że niestateczność jest jedną z głównych cech konstrukcji o skrajnej geometrii.

Szereg zjawisk pokrewnych nazywanych *wyoboczeniem w sensie technicznym* nie jest przedmiotem rozważań w tym skrypcie.

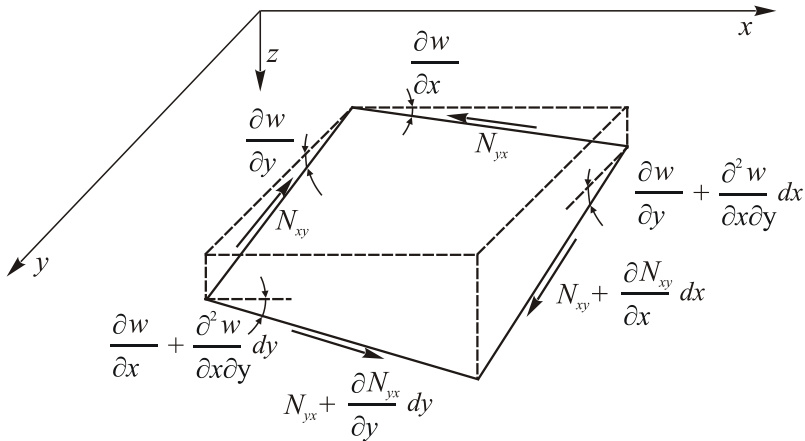
Określenie wszystkich możliwych postaci wyoboczenia, pokrywających ścieżek równowagi jest możliwe dzięki wykorzystaniu metody elementów skończonych MES.

8.2. Jednoczesne zginanie i ściskanie płyt prostokątnych

W rozdziale 7 założono, że siły wewnętrzne w powierzchni środkowej płyty N_x , N_y i N_{xy} są małe i można pominąć ich wpływ na ugięcie płyty (tzn. siły te są małe w porównaniu z naprężeniami krytycznymi powodującymi wyoboczenie płyty).



Rys. 8.2. Siły wewnętrzne w powierzchni środkowej płyty



Rys. 8.3. Kąty w ugiętym elemencie płytowym

Jeśli siły przekrojowe w powierzchni środkowej nie są małe, to musimy uwzględnić, że pod działaniem obciążenia zewnętrznego płyta może być w równowadze w postaci ugiętej.

W celu wyprowadzenia odpowiednich różniczkowych równań równowagi cienkich płyt prostokątnych przy uwzględnieniu sił w powierzchni środkowej należy dodatkowo, w porównaniu do rozważań w podrozdziale 7.9, uwzględnić ugięcie nieskończenie małego prostokątnego elementu płytowego o grubości h i o wymiarach podstawy dx i dy odpowiednio w kierunkach x i y . Na rys. 8.2 przedstawiono ugięty element płytowy z zaznaczeniem wewnętrznych sił N_x , N_y , a na rys. 8.3 sił N_{xy} .

Biorąc pod uwagę ugięcie płyty przy zapisywaniu równania równowagi wszystkich sił działających na element $h dx dy$ w kierunku osi z i po uwzględnieniu (7.48) otrzymano:

$$\begin{aligned}
 & (Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx) dy - Q_x dy + (Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy) dx - Q_y dx + q dx dy + \\
 & + (N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx) dy (\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx) - N_x dy \frac{\partial w}{\partial x} + \\
 & + (N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y} dy) dx (\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy) - N_y dx \frac{\partial w}{\partial y} + \\
 & + (N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx) dy (\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} dx) - N_{xy} dy \frac{\partial w}{\partial y} + \\
 & + (N_{yx} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} dy) dx (\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy) - N_{yx} dx \frac{\partial w}{\partial x} = 0
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

Po zredukowaniu, pominięciu wielkości o rząd mniejszych od pozostałych i po podzieleniu przez pole powierzchni płyty $dxdy$ mamy następujące różniczkowe równanie równowagi:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q + (N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} + N_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}) + \\ & + [\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y}] \frac{\partial w}{\partial x} + [\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y}] \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (8.2)$$

Pozostałe równania równowagi, czyli sumy rzutów sił na oś x i y (7.50) oraz sumy momentów względem osi przechodzącej przez środek ciężkości elementu prostopadłościennego i równoległych, odpowiednio, do osi y (7.46) i osi x (7.47) są identyczne.

Uwzględniając równania (7.51) oraz zależności $N_{xy} = N_{yx}$ w (8.2) łatwo zauważyć, że człony w nawiasach kwadratowych są równe zero i wówczas równanie (8.2) przyjmuje postać:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (8.3)$$

zaś po uwzględnieniu zależności (7.46) i (7.47) mamy ostatecznie:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = q + \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (8.4)$$

Porównując zależności (8.4) i (7.49) stwierdzono, że wyrażenie w nawiasie kwadratowym w (8.4) można nazwać efektywnym obciążeniem poprzecznym.

Podsumowując, w przypadku sprzężenia obciążenia w powierzchni środkowej i obciążenia poprzecznego q równania równowagi dla odkształconego elementu płytowego mają postać:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\ & \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (8.5)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

W przypadku płyty wykonanej z laminatu o budowie symetrycznej dwa pierwsze równania równowagi (8.5) są niezależne od trzeciego równania (8.5) i równanie równowagi ugiętej płyty można zapisać:

Tabela 8.1. Odształcona płyta kompozytowa o budowie symetrycznej

Wielowarstwowa płyta o budowie symetrycznej		
1. Przypadek ogólny tzn. $B_{ij} = 0$ i $D_{ij} \neq 0$ dla $i, j = 1, 2, 6$		
$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - q - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$		
2. Płyta quasi-ortotropowa tzn. $B_{ij} = 0$ i $D_{16} = D_{26} = 0$		
$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - q - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$		
3. Płyta izotropowa tzn. $D_{11} = D_{22} = D_{12} + 2D_{66}$		
$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - q - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$		
4. Warunki brzegowe:		
	$x = \text{const}$	$y = \text{const}$
brzeg swobodny	$M_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0$	$M_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} = 0$
brzeg przegubowo podparty	$w = M_x = 0$	$w = M_y = 0$
brzeg utwierdzony	$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0$	$w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0$
5. Momenty wewnętrzne i siły poprzeczne		
Przypadek ogólny		Quasi-ortotropia
$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$		$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$
$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$		$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$

$$\begin{aligned}
& D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \\
& - q - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0
\end{aligned} \tag{8.6}$$

zaś w przypadku quasi-ortotropowej płyty:

$$\begin{aligned}
& D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \\
& - q - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0
\end{aligned} \tag{8.7}$$

W przypadku płyty ortotropowej równanie równowagi (8.7) pozwala wyznaczyć obciążenie krytyczne (czyli bifurkacyjne) dla ściskanej lub ścinanej płyty.

W Tablicy 8.1 podano równania równowagi, warunki brzegowe i siły wewnętrzne dla odkształconej płyty wykonanej z laminatu symetrycznego.

Dla elementu belkowego jednowymiarowego w kierunku x równanie równowagi, na podstawie (8.5), ma postać (patrz Tablica 7.4):

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} = q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{8.8}$$

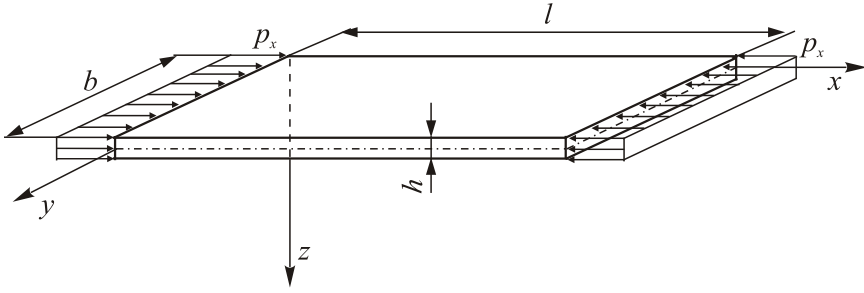
8.3. Obciążenie krytyczne ściskanej ortotropowej płyty prostokątnej

Zjawisku utraty stateczności płyt towarzyszy przejście z podstawowej postaci równowagi odpowiadającej idealnie płaskiej płycie do nowej postaci, której odpowiada ugięta płyta. W chwili utraty stateczności, czyli dla obciążenia krytycznego, płyta może mieć teoretycznie jedną z dwóch tych postaci. W analizie stateczności badamy nową sąsiednią postać równowagi, a zatem ugiętą płytę.

Rozpatrzmy szczególnie przypadek płyty ortotropowej o głównych kierunkach ortotropii równoległych do jej krawędzi, czyli w kierunkach x i y (rys. 8.4). Zakładamy, że płyta jest przegubowo podparta na wszystkich brzegach i obciążona równomiernie rozłożonymi naprężeniami ściskającymi p_x w kierunku osi x .

Należy wyznaczyć obciążenie krytyczne (bifurkacyjne) p_{kr} idealnej płyty, przy którym płaska postać równowagi przestaje być jedyną możliwą i stateczną postacią równowagi (tzn. płyta traci stateczność).

Wymiary płyty prostokątnej oznaczono odpowiednio (rys. 8.4): ℓ - długość płyty w kierunku ściskania, b - szerokość płyty, h - grubość płyty.



Rys. 8.4. Ściskana ortotropowa płyta prostokątna

Do chwili utraty stateczności stan naprężenia w płycie jest jednorodny (tzn. równomierne ściskanie) i można go opisać następująco:

$$N_x = -p_x h \quad N_y = N_{xy} = q = 0 \quad (8.9)$$

W powyższej zależności przyjęto znak minus, bo płyta obciążona jest naprężeniami ściskającymi. Należy wyznaczyć rozwiązanie równania (8.7) różne od zera (co odpowiada przypadkowi ugiętej płyty) i spełniające warunki przegubowego podparcia wszystkich krawędzi (tablica 8.1), tzn.:

$$\text{dla } x=0 \text{ i dla } x=\ell \quad w=0 \text{ i } M_x = -(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) = 0$$

$$\text{dla } y=0 \text{ i dla } y=b \quad w=0 \text{ i } M_y = -(D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) = 0 \quad (8.10)$$

W chwili utraty stateczności płyta ugina się w ten sposób, że w kierunkach osi x i y tworzy się odpowiednio m i n półfal. Zatem ugięcie płyty aproksymowano funkcją:

$$w(x, y) = f_{mn} \sin \frac{m\pi x}{\ell} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad \text{dla } m, n=1, 2, 3, \dots \quad (8.11)$$

gdzie f_{mn} jest amplitudą funkcji ugięcia.

Założona funkcja (8.11) spełnia wszystkie założone warunki brzegowe (8.10). W celu rozwiązania równania (8.7) podstawiono funkcję ugięcia płyty (8.11) i otrzymano:

$$f_{mn} \{ \pi^4 [D_{11} (\frac{m}{\ell})^4 + 2(D_{12} + D_{66}) (\frac{mn}{\ell b})^2 + D_{22} (\frac{n}{b})^4 - p_x h \pi^2 (\frac{m}{\ell})^2] \} = 0 \quad (8.12)$$

Ponieważ interesuje nas rozwiązanie nietrywialne równania (8.12), czyli różne od zera, to należy przyjąć, że wyrażenie w nawiasie klamrowym jest równe zero, czyli:

$$p_x = \frac{\pi^2 \sqrt{D_{11} D_{22}}}{hb^2} \left[\sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}}} \left(\frac{m}{\lambda} \right)^2 + \frac{2(D_{12} + D_{66})}{\sqrt{D_{11} D_{22}}} n^2 + \sqrt{\frac{D_{22}}{D_{11}}} n^4 \left(\frac{\lambda}{m} \right)^2 \right] \quad (8.13)$$

$$\text{gdzie: } \lambda = \ell / b. \quad (8.14)$$

Amplituda ugięcia f_{mn} jest nieokreślona. Zależność (8.13) określa wszystkie wartości p_x dla $m, n=1, 2, 3, \dots$ odpowiadające założonemu ugięciu płyty.

Obciążenie krytyczne jest najmniejszą wartością obciążenia. Otrzymamy je dla $n=1$, czemu odpowiada jedna półfala wyboczenia płyty w kierunku Oy .

Obciążenie krytyczne dla m -tej postaci określone jest wzorem:

$$p_{kr,m} = \frac{\pi^2 \sqrt{D_{11} D_{22}}}{hb^2} \left[\sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}}} \left(\frac{m}{\lambda} \right)^2 + \frac{2(D_{12} + D_{66})}{\sqrt{D_{11} D_{22}}} + \sqrt{\frac{D_{22}}{D_{11}}} \left(\frac{\lambda}{m} \right)^2 \right] \quad (8.15)$$

Minimalna wartość obciążenia ze względu na m prawej strony zależności (8.15) jest poszukiwanym obciążeniem krytycznym (bifurkacyjnym):

$$\bar{p}_{kr} = \min_m p_{kr,m} = \frac{\pi^2 \sqrt{D_{11} D_{22}}}{hb^2} 2 \left[1 + \frac{(D_{12} + D_{66})}{\sqrt{D_{11} D_{22}}} \right] \quad (8.16)$$

przy założeniu, że wyrażenie:

$$\psi = \lambda \sqrt[4]{\frac{D_{22}}{D_{11}}} \quad (8.17)$$

jest liczbą całkowitą. W przypadku, gdy $\lambda = \ell / b \geq 1$ i wyrażenie (8.17) ψ nie jest liczbą całkowitą obciążenie krytyczne jest nieco większe. Istotne różnice pojawiają się dla $\lambda < 1$.

Na podstawie zależności (8.15) można prześledzić zależność obciążenia krytycznego p_{kr} w funkcji współczynnika ψ (8.17) dla kolejnych $m=1, 2, 3, \dots$.

$$\text{Jeśli } \psi = \sqrt{m(m+1)} \quad (8.18)$$

to dla jednej i tej samej wartości obciążenia krytycznego możliwe są dwie różne ugięte postacie wyboczenia:

- dla m półfal w kierunku ściskania:

$$f_{m1} \sin \frac{m\pi x}{\ell} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (8.19)$$

- dla $(m+1)$ półfal:

$$f_{(m+1)1} \sin \frac{(m+1)\pi x}{\ell} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (8.20)$$

Z zależności (8.17) i (8.18) można wyznaczyć liczbę półfal m odpowiadającą danej wartości ψ :

- jeśli $0 \leq \lambda \leq 1.41 \sqrt[4]{\frac{D_{11}}{D_{22}}}$, to $m = 1$
- jeśli $1.41 \sqrt[4]{\frac{D_{11}}{D_{22}}} \leq \lambda \leq 2.45 \sqrt[4]{\frac{D_{11}}{D_{22}}}$, to $m = 2$

itd.

Jeśli płyta ortotropowa ma znaczą szerokość (tzn. $b \gg \ell$) czyli dla $\psi = \lambda \sqrt[4]{D_{22}/D_{11}} \ll 1$ i $m = 1$, to we wzorze (8.15) można pominąć dwa ostatnie składniki w nawiasie kwadratowym w porównaniu z pierwszym składnikiem i wtedy:

$$p_{kr,1} = \frac{\pi^2 \sqrt{D_{11}D_{22}}}{hb^2} \sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}}} \left(\frac{b}{\ell}\right)^2 = \frac{\pi^2 D_{11}}{h\ell^2} \quad (8.21)$$

Wzór ten jest identyczny ze wzorem Eulera dla pręta o długości ℓ i przegubowo podpartego na obu obciążonych końcach. Dla stosunku $\lambda = \ell/b \ll 1$ usztywnienie płyty wynikające z podparcia krótszych boków płyty staje się pomijalnie małe.

W przypadku płyty izotropowej (tzn. $D_{11} = D_{22} = D_{12} + D_{66}$) obciążenie krytyczne, zgodnie z (8.16), wynosi:

$$\bar{p}_{kr} = 4 \frac{\pi^2 D_{11}}{hb^2} \quad (8.22)$$

Można rozpatrywać także wiele innych typów obciążeń płyty oraz różnych warunków brzegowych płyt wykonanych z różnych materiałów, w tym izotropowych [19,28,30,38].

Przykład 8.1

Prostokątna płyta swobodnie podparta na całym obwodzie o wymiarach (rys. 8.4): $\ell = 1000$ mm, $b = 100$ mm, $h = 1$ mm poddana jest ścisnaniu w kierunku osi x . Wyznaczyć wartości obciążeń krytycznych dla płyty wykonanej z materiału ortotropowego o głównych kierunkach ortotropii pokrywającej się z krawędziami płyty. Rozpatrzeć 13 wariantów stałych materiałowych podanych w Tabelicy 8.2 [19].

Rozwiązanie

W celu wyznaczenia bezwymiarowego obciążenia krytycznego dla m -tej postaci wyboczenia równanie (8.15) podzielono przez moduł Younga w kierunku ściskania E_I i otrzymano równanie:

$$\frac{p_{kr,m}}{E_1} = \frac{\pi^2 \sqrt{D_{11} D_{22}}}{hb^2 E_1} \left[\sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}}} \left(\frac{m}{\lambda}\right)^2 + \frac{2(D_{12} + D_{66})}{\sqrt{D_{11} D_{22}}} + \sqrt{\frac{D_{22}}{D_{11}}} \left(\frac{\lambda}{m}\right)^2 \right] \quad (8.23)$$

Dla każdego z wariantów przyjętych stałych materiałowych w Tablicy 8.2 i wymiarów geometrycznych wyznaczano wartości $p_{kr,m}/E_1$ dla liczby m półfal zmieniających się w przedziale $1 \leq m \leq 30$. Najmniejszą wartość bezwymiarowego obciążenia krytycznego $p_{kr,m}^{\min}/E_1$ i odpowiadającą jej liczbę półfal m podano w tablicy 8.2. W tablicy podano także wartość bezwymiarowego obciążenia krytycznego \bar{p}_{kr}/E_1 (8.16) oraz wartość parametru ψ (8.17).

Tablica 8.2. Wartości obciążeń krytycznych dla ściskanych płyt prostokątnych o następujących wymiarach $\ell=1000$ mm, $b=100$ mm, $h=1$ mm i swobodnie podpartych na całym obwodzie wykonanych z materiałów ortotropowych o następujących stałych materiałowych

Lp	$\frac{E_2}{E_1}$	$\frac{G}{E_1}$	ν_{12}	ν_{21}	$\frac{p_{kr,m}^{\min}}{E_1} 10^3$	m	$\frac{\bar{p}_{kr}}{E_1} 10^3$	ψ
1	13.736	0.406	0.0218	0.3	0.797	19	0.797	19.25
2	7.604	0.409	0.0394	0.3	0.644	17	0.643	16.60
3	3.299	0.400	0.0909	0.3	0.497	13	0.489	13.47
4	1.974	0.393	0.1519	0.3	0.423	12	0.423	11.85
5	1.420	0.401	0.2112	0.3	0.393	11	0.393	10.91
6	1.196	0.388	0.2507	0.3	0.376	10	0.375	10.45
7	1.000	0.384	0.3	0.3	0.361	10	0.361	10.00
8	0.835	0.324	0.3	0.2507	0.314	10	0.314	9.56
9	0.704	0.282	0.3	0.2112	0.277	9	0.277	9.16
10	0.506	0.199	0.3	0.1519	0.215	8	0.214	8.43
11	0.303	0.121	0.3	0.0909	0.149	7	0.148	7.41
12	0.131	0.0538	0.3	0.0394	0.0846	6	0.0846	6.02
13	0.0728	0.0296	0.3	0.0218	0.0581	5	0.0580	5.19

Z porównania wartości $p_{kr,m}^{\min}/E_1$ i \bar{p}_{kr}/E_1 widać, że przyjęcie założenia, że ψ jest liczbą całkowitą jest w pełni uzasadnione dla $\ell > b$, ponieważ obie wartości obciążeń krytycznych różnią się nieznacznie dla danego wariantu stałych materiałowych.

Wariant 7 odpowiada materiałowi izotropowemu $E_2/E_1=1$ i na długości płyty tworzy się dziesięć półfal, czyli $m=10$. Dla $E_2/E_1=13.736$ liczba półfal wyboczenia ulega dwukrotnemu powiększeniu w stosunku do materiału izotropowego i odpowiednio dwukrotnemu zmniejszeniu dla $E_2/E_1=0.0728$.

9. LITERATURA

- [1] Altenbach H., Altenbach J., Kissing W. – Structural analysis of laminate and sandwich beams and plates, An introduction into the mechanics of composite. Lubelskie Towarzystwo Naukowe, Lublin, 2001.
- [2] Berthelot J. M. – Composite Materials – Mechanical Behaviour and Structural Analysis. Springer Verlag, New York Inc, 1999.
- [3] Calcote L. R. – The analysis of laminated composite structures. Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1969.
- [4] Carlsson L. A., Pipes R. B. – Experimental characterization of advanced composite materials. Lancaster– Basel, Technomic Publishing Co., 1997.
- [5] Christensen R. M. – Mechanics of composite materials. John Wiley & Sons Inc., 1979.
- [6] Cui W. C., Wisnom M. R., Jones M. – A comparison of failure criteria to predict delamination of unidirectional glass/epoxy specimens waisted through the thickness. Composites, 23, 3, 1992.
- [7] Derski W. – Podstawy teorii sprężystości. PWN, W-wa–Łódź, 1964.
- [8] Derski W. – Zarys teorii ośrodków ciągłych. PWN, Warszawa, 1973.
- [9] Fung Y. C. – Podstawy mechaniki ciała stałego. PWN, W-wa, 1969.
- [10] Gay D., Hoa S. V., Tsai S. W. – Composite materials design and applications. CRC Press LLC, 2003.
- [11] Hill R. – Theory of yield and plastic flow of anisotropic metals. Proc. Royal Society, A 193, 1948.
- [12] Hill R. – Theory of mechanical properties of fibre–strengthened Materials – III. Self–consistent model. J. Mech. Phys. Solids., 13, 189–198, 1965.
- [13] Hill R. – A user–friendly theory of orthotropic plasticity in sheet metals. Int. J. Mech. Sci., 35, 19, 1993.
- [14] Hoffman O. J. – The brittle fracture of orthotropic materials. Journal of Composite Materials, 1, 1967.
- [15] Jones R. M. – Mechanics of composite materials. International Student Edition, McGraw–Hill Kogakusha, Ltd., Tokyo, 1975.
- [16] Jones R. M. – Mechanics of Composite Materials. 2/E, Taylor & Francis, USA, 1998.
- [17] Kelly A. (Ed.) – Concise Encyclopedia of Composite Materials. Pergamon Press, 1989.

- [18] Kollar L., Springer G. – Mechanics of Composite Structure. Cambridge University Press, 2003.
- [19] Kołakowski Z., Kowal–Michalska K. (Eds.) – Selected problems of instabilities in composite structures. Technical University of Lodz, A series of monographs, Lodz, 1999.
- [20] Kotelko M., Kubiak T. – Advanced mechanical engineering. Technical University of Lodz, 2006.
- [21] Kowal–Michalska K. (Ed.) – Stateczność dynamiczna kompozytowych konstrukcji płytowych. Praca zbiorowa. Wydawnictwo Naukowo–Techniczne, Fundacja Książka Naukowo–Techniczna, Warszawa, 2007.
- [22] Magnucki K., Ostwald M. (Eds) – Stateczność i optymalizacja konstrukcji trójwarstwowych. Politechnika Poznańska, Uniwersytet w Zielonej Górze, Poznań – Zielona Góra, 2001.
- [23] Malicki A., Sadowski T. – Wybrane zagadnienia z teorii sprężystości. Politechnika Lubelska, Lublin, 2001.
- [24] Muc A. – Mechanika kompozytów włóknistych. Księgarnia Akademicka, Kraków, 2003.
- [25] Muc A. – Optymalizacja struktur kompozytowych i procesów technologicznych ich wytwarzania. Księgarnia Akademicka, Kraków, 2005.
- [26] Niezgodziński T. – Elastooptyka i metoda elementów skończonych w mechanice pękania. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź, 2007.
- [27] Nowacki J. – Materiały kompozytowe. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź, 1993.
- [28] Nowacki W. – Dźwigary powierzchniowe. PWN, Warszawa, 1979.
- [29] Puck A. – Festigkeitsanalyse an Faser–Matrix–Laminaten: Realistische Bruchkriterien und Degradationsmodelle. Hanser, Muenchen, 1996.
- [30] Timoshenko S. P., Gere J.M. – Teoria stateczności sprężystej. Wydawnictwo Arkady, Warszawa, 1963.
- [31] Timoshenko S., Goodier J. N. – Teoria sprężystości. Wydawnictwo Arkady, Warszawa, 1962.
- [32] Timoshenko S., Woinowsky–Krieger S. – Teoria płyt i powłok. Wydawnictwo Arkady, Warszawa, 1962.
- [33] Tsai S. W., Wu E. M. – A general theory of strength for anisotropic materials. J. Comp. Mater., 5 (1), 1971.
- [34] Tsai S. W. – Composite design – 1985. United States Air Force Materials Laboratory, Think Composites, Dayton Paris and Tokyo, 1985.
- [35] Vasiliev V., Morozov E. – Mechanics and Analysis of Composite Materials. Elsevier Science Ltd., 2001.
- [36] Walczak J. – Wytrzymałość materiałów oraz podstawy teorii sprężystości i plastyczności. PWN, Warszawa–Kraków, 1978.

- [37] Wilczyński A. P. – Polimerowe kompozyty włókniste – własności, struktura, projektowanie. Wydawnictwa Naukowo–Techniczne, Warszawa, 1996.
- [38] Woźniak Cz. (Ed.) – Mechanika sprężystych płyt i powłok. PWN, Warszawa, 2001.
- [39] Yu M. H. – Advances in strength theories for material under complex stress state in the 20th century. Appl. Mech. Rev., 55, 3, 2002.
- [40] German J. – Podstawy mechaniki kompozytów włóknistych. PK, Kraków, 2001, http://limba.wil.pk.edu.pl/~jg/wyklady_komp/index.htm

